

# Übung zur Funktionalanalysis

SoSe 2015

## 6. Übungsblatt

---

### Aufgaben

#### Aufgabe 25

Es sei  $X$  ein Vektorraum abzählbarer Dimension, also  $X \cong d$  für

$$d := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n = 0 \text{ fast überall}\}$$

den Raum der abbrechenden Folgen. Zeigen Sie jeweils mit der angegebenen Methode, dass es auf  $X$  (oder äquivalent auf  $d$ ) *keine* Norm geben kann, die  $X$  zu einem Banachraum macht.

- Direkt mit dem Satz von Baire. Zeigen Sie hierzu, dass  $X$  dünn (also eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen) ist.
- Als Folgerung aus dem Satz über die offene Abbildung. Konstruieren Sie hierfür eine stetige und surjektive lineare Abbildung  $T: X \rightarrow X$ , für die  $T^{-1}$  für jede Norm auf  $X$  nicht stetig ist.
- Als Folgerung aus dem Satz über den abgeschlossenen Graphen. Konstruieren Sie hierfür einen abgeschlossenen Operator  $T: X \rightarrow X$ , der bezüglich jeder Norm auf  $X$  nicht stetig ist.

Wie sieht es um die gleichen Aussagen/Konstruktionen aus, wenn wir nur verlangen, dass  $X$  mit einer Metrik versehen wird, die  $X$  zu einem  $F$ -Raum macht?