

Übung zur Funktionalanalysis

SoSe 2015

6. Übungsblatt

Aufgaben

Aufgabe 25

Es sei X ein Vektorraum abzählbarer Dimension, also $X \cong d$ für

$$d := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid a_n = 0 \text{ fast überall}\}$$

den Raum der abbrechenden Folgen. Zeigen Sie jeweils mit der angegebenen Methode, dass es auf X (oder äquivalent auf d) *keine* Norm geben kann, die X zu einem Banachraum macht.

- Direkt mit dem Satz von Baire. Zeigen Sie hierzu, dass X dünn (also eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen) ist.
- Als Folgerung aus dem Satz über die offene Abbildung. Konstruieren Sie hierfür eine stetige und surjektive lineare Abbildung $T: X \rightarrow X$, für die T^{-1} für jede Norm auf X nicht stetig ist.
- Als Folgerung aus dem Satz über den abgeschlossenen Graphen. Konstruieren Sie hierfür einen abgeschlossenen Operator $T: X \rightarrow X$, der bezüglich jeder Norm auf X nicht stetig ist.

Wie sieht es um die gleichen Aussagen/Konstruktionen aus, wenn wir nur verlangen, dass X mit einer Metrik versehen wird, die X zu einem F -Raum macht?