Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

5. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P19

Es sei X ein normierter Raum und $\gamma\colon [a,b] \to X$ stetig. Dann heißt $x \in X$ ein *schwaches Integral* von γ, falls

$$\lambda(x) = \int_a^b \lambda(\gamma(t))dt$$

für alle stetigen linearen Funktionale $\lambda \in X'$ gilt. Ist dies der Fall so setzen wir $\int_a^b \gamma(t)dt := x$.
Zeigen Sie:

(a) Existiert ein schwaches Integral von $\gamma \in C([a,b], X)$, so ist es eindeutig.

(b) Ist $\gamma\colon [a,b] \to X$ stetig differenzierbar, existiert also

$$\gamma'(t) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t))$$

für alle $t \in [a,b]$ und ist $t \mapsto \gamma'(t)$ stetig, so existiert $\int_a^s \gamma'(t)dt$ für alle $s \in [a,b]$ und es gilt

$$\gamma(s) = \gamma(a) + \int_a^s \gamma'(t)dt.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $(\lambda \circ \gamma)'(t) = \lambda(\gamma'(t))$ für alle $\lambda \in X'$.

Aufgabe P20

Sind die folgenden Abbildungen offen, abgeschlossen, beides oder keines von beiden? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$.

(b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, $x \mapsto (x, x^2)$.

(c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ (die Gauß-Klammer).

(d) $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$.

Aufgabe P21

Sei $d := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, a_n = 0 \text{ fast überall}\}$ der Raum der $\mathbb{K}$-wertigen abbrechenden Folgen. Für $1 \leq p < \infty$ sei außerdem $\|\cdot\|_p$ die Norm auf d definiert durch

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Identifizieren Sie die Vervollständigung des normierten Raums $(d, \|\cdot\|_p)$ mit einem Ihnen bekannten Banachraum.

Bemerkung: Die Aufgabe zeigt die starke Abhängigkeit der Vervollständigung von der Norm.

Aufgabe P22

Für $n \in \mathbb{N}$ sei eine Quadraturformel $Q_n\colon C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^{r_n} c_k^{(n)} f(t_k^{(n)})$$

für $\left(c_k^{(n)}\right)_{k=1,\ldots,r_n} \in \mathbb{R}$ und $a \leq t_1^{(n)} < \ldots < t_{r_n}^{(n)} \leq b$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(t)dt \tag{$*$}$$

für alle $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ gilt, falls $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{r_n} |c_k^{(n)}| < \infty$ und die Gleichung $(*)$ für alle Polynome erfüllt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die obige Voraussetzung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{r_n} |c_k^{(n)}| < \infty$ erfüllt ist, falls

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|Q_n(f)\| < \infty$$

für alle $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe P23

Sei X ein Banachraum und $T \in L(X)$. Zeigen Sie: Ist $\|T\|_{\mathrm{op}} < 1$, dann ist $\mathrm{id}_X - T$ bijektiv und die Umkehrabbildung ist linear und stetig, d. h., $(\mathrm{id}_X - T)^{-1} \in L(X)$.

Aufgabe P24

Es seien X und Y Banachräume. Außerdem sei $T \in L(X,Y)$ surjektiv. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $T(x) = y$ und $\|x\| \leq M\|y\|$.