# Übung zur Funktionalanalysis
# SoSe 2015

### 4. Übungsblatt

---

### Präsenzübungen

**Aufgabe P13**
Seien $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $U \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Seien außerdem $x_0 \in X \backslash U$ und $d := d(x_0, U)$ (vgl. Aufgabe H6). Zeigen Sie, dass ein $\lambda \in X'$ exisitert mit

$$\lambda(x_0) = 1, \quad \lambda(x) = 0 \quad \forall x \in U \quad \text{und} \quad \|\lambda\|_{\mathrm{op}} = d^{-1}.$$

**Hinweis:** Wenden Sie Aufgabe H9 auf den Quotientenraum $X/U$ an.

**Aufgabe P14**
Sei $X$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

(a) Ist $\lambda : X \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional und setzt man $\tilde{\lambda}(x) := \lambda(x) - i\lambda(ix)$, so ist $\tilde{\lambda} : X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional und $\lambda(x = \mathrm{Re}(\tilde{\lambda})$.

(b) Ist $\varphi : X \to \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional, $\lambda := \mathrm{Re}(\varphi)$ und $\tilde{\lambda}$ wie in Teilaufgabe (a), so ist $\lambda$ $\mathbb{R}$-linear und $\tilde{\lambda} = \varphi$.

(c) Ist $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm und $\lambda : X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear, so gilt die Äquivalenz

$$|\lambda(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X \quad \Leftrightarrow \quad |\mathrm{Re}(\lambda(x))| \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

(d) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $\lambda : X \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear und stetig, so ist $\|\lambda\| = \|\mathrm{Re}(\lambda)\|$.

**Mit anderen Worten:** Die Abbildung $\lambda \mapsto \mathrm{Re}(\lambda)$ eine bijektive $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zwischen dem Raum der $\mathbb{C}$-linearen und dem der $\mathbb{R}$-wertigen $\mathbb{R}$-linearen Funktionale. Im normierten Fall ist die Abbildung isometrisch.

**Aufgabe P15**
Beweisen Sie den Satz von Hahn-Banach im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ für einen separablen normierten Raum $X$ *ohne* Verwendung des Zornschen Lemmas (wie in der Analysis stillschweigend üblich dürfen Sie hierbei immernoch das *abzählbare* Auswahlaxiom verwenden).

**Aufgabe P16**

Sei $1 \leq p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T : \ell^q \to (\ell^p)', \quad (Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n,$$

wobei $x = (s_n) \in \ell^q$ und $y = (t_n) \in \ell^p$, ein isometrischer Isomorphismus ist.

**Aufgabe P17**

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$T : \ell^1 \to (\ell^\infty)', \quad (Tx)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n,$$

wobei $x = (s_n) \in \ell^1$ und $y = (t_n) \in \ell^\infty$, isometrisch ist, aber nicht surjektiv.

**Hinweis:** Sei $c$ der Raum der konvergenten Folgen bzg. der Norm $\|\cdot\|_\infty$. Betrachten Sie das Funktional $\lim : c \to \mathbb{K}$, $\lim y := \lim_n t_n$.

**Aufgabe P18**

Für $0 < p < 1$ sei $(\ell^p, d_p)$ der metrische Raum von Aufgabe H3. Zeigen Sie, dass es keine nichttrivialen stetigen linearen Funktionale auf $\ell^p$ gibt.