Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

3. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P10

Für $x = (x_n) \in \ell^\infty$, sei $[x]$ die zugehörige Äquivalenzklasse in ℓ^∞/c_0, wobei c_0 der Raum der Nullfolgen ist. Zeigen Sie, dass $\|[x]\| = \limsup |x_n|$.

Aufgabe P11

Zeigen Sie, dass c (der Raum der konvergenten Folgen bzg. $\|\cdot\|_\infty$) separabel ist.
Hinweis: Ggf. hilft es zuerst zu zeigen, dass c_0 (der Raum der Nullfolgen bzg. $\|\cdot\|_\infty$) separabel ist.

Aufgabe P12

Ist der Raum $(C([0,1],\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ der stetigen Funktionen mit der Supremumsnorm separabel?

Bitte wenden!

Hausübungen

Aufgabe H7

Für $0 \leq \alpha < 1$ bezeichne $C^\alpha([0,1])$ den Raum der stetigen Funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, so dass ein $L > 0$ existiert mit

$$\forall\, s,t \in [0,1] : |f(s) - f(t)| \leq L|s-t|^\alpha.$$

Diese Bedingung heißt *Hölderbedingung* und die Funktionen in $C^\alpha([0,1])$ heißen *Hölder-stetig*. Für $f \in C^\alpha([0,1])$ setzen wir

$$[f]_\alpha := \sup_{s \neq t} \frac{|f(s) - f(t)|}{|s-t|^\alpha}.$$

Zeigen Sie, dass $\|f\|_{C^\alpha} := \|f\|_\infty + [f]_\alpha$ eine Norm auf $C^\alpha([0,1])$ definiert, und dass $C^\alpha([0,1])$ bezüglich dieser Norm ein Banachraum ist.

Aufgabe H8

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ nichttriviale normierte Räume. Zeigen Sie, dass der Raum $L(X,Y)$ nicht nur die Nullabbildung enthält.

Aufgabe H9

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $x \in X$. Zeigen Sie, dass

$$\|x\| = \sup\{|\lambda(x)| \,:\, \lambda \in X' \text{ und } \|\lambda\|_{\mathrm{op}} \leq 1\}.$$

Zeigen Sie außerdem, dass das Supremum angenommen wird.

Aufgabe H10

Zeigen Sie, dass der Fréchet-Raum $(C^\infty([0,1],\mathbb{K}), d)$ von Aufgabe H2 separabel ist.