Übung zur Funktionalanalysis
SoSe 2015

1. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P1
Zeigen Sie, dass,

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_+, \ \ d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } \ x = y \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Metrik auf einer beliebigen Menge M definiert. Beschreiben Sie für $x \in M$ die Kugeln

$$B_\epsilon(x) := \{y \in M \ : \ d(x,y) = \epsilon\}.$$

Aufgabe P2
Sei $n \geq 2$ und P ein Punkt in $\mathbb{R}^n$ (mit einer beliebigen Norm $\|\cdot\|$). Zeigen Sie, dass die Abbildung d eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$ definiert:

$$d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\| & \text{wenn } \ P, x \ \text{ und } \ y \ \text{ auf einer Gerade liegen} \\ \|x-P\| + \|P-y\| & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe P3
Sei M eine Untermenge eines metrischen Raums X. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Das Komplement von M ist offen.

(2) Jeder Häufungspunkt von M ist in M.

Aufgabe P4
Zeigen Sie: Ein kompakter metrischer Raum ist vollständig.

Aufgabe P5
Wenn (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume sind, dann ist eine Isometrie eine Abbildung $f : X \to Y$, so dass

$$d_X(x,y) = d_Y(f(x), f(y))$$

für alle $x, y \in X$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Eine Isometrie ist injektiv.

(2) Eine surjektive Isometrie ist eine offene Abbildung, d.h. Bilder von offenen Mengen sind offen.

(3) Eine surjektive Isometrie besitzt eine stetige Umkehrfunktion.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass eine Abbildung zwischen metrischen Räumen genau dann stetig ist wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

Hausübungen

Aufgabe H1

Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen:

(1) Ist X ein vollständiger metrischer Raum und M eine abgeschlossene Teilmenge von X, so ist M vollständig.

(2) Ist X ein metrischer Raum und M eine vollständige Teilmenge von X, so ist M abgeschlossen.

Aufgabe H2

Zeigen Sie, dass $C^\infty([0,1],\mathbb{R})$

$$d(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}$$

ein Fréchet-Raum ist.

Aufgabe H3 Sei $0 < p < 1$. Der Raum l^p ist definiert als die Menge aller Folgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\Delta_p(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \,.$$

Wir versehen l^p mit der folgenden invarianten Metrik:

$$d_p : l^p \times l^p \to \mathbb{R}_+, \quad d_p(x,y) := \Delta_p(x-y).$$

Zeigen Sie, dass der metrische Raum l^p kein Fréchet-Raum ist. Zeigen Sie hierzu, dass die Nullumgebung $B_\varepsilon(0)$, für beliebiges $\varepsilon > 0$, keine konvexe offene Umgebung enthalten kann.

Hinweis: Ein Gegenbeispiel kann mit Partialsummen harmonischer Reihen konstruiert werden.