Lehramtsspezifisches Projekt/Referat zum Thema Körperautomorphismen

Christoph Wockel

24. Juli 2014

Einleitung

In diesem Projekt wollen wir den Begriff des Körperautomorphismus vorstellen. Wir gehen dabei nach [1] vor.

1 Grundlegende Definitionen

Definition 1.1. Es sei k ein Körper. Dann ist eine Abbildung $\varphi : k \to k$ ein *Körperautomorphismus*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ für alle $x, y \in k$
2. $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ für alle $x, y \in k$
3. $\varphi(1) = 1$.
4. φ ist bijektiv. ■

Wir beweisen zunächst einen elementaren Sachverhalt von Körperautomorphismen.

Lemma 1.2. *Ist $\varphi : k \to k$ ein Körperautomorphismus, so gilt $\varphi(0) = 0$.*

Beweis. Es gilt

$$\varphi(0) = \varphi(0) + \varphi(0)$$

und da $(k, +)$ eine Gruppe ist folgt aus [1, Lemma 2.1]

$$0 = \varphi(0).$$ ■

Eine zentrale Eigenschaft von Körperautomorphismen ist die folgende.

Satz 1.3. *Ist $\mathrm{Prim}(k) \subseteq k$ der Primkörper von k, so gilt $\varphi(x) = x$ für alle $x \in \mathrm{Prim}(k)$. Insbesondere gilt somit $\varphi \in \mathrm{Gal}_{\mathrm{Prim}(k)}(k)$.*

Beweis. Nach Definition lässt sich jedes Element $x \in \mathrm{Prim}(k)$ als Summe der 1 schreiben, also

$$x = 1 + 1 + ... + 1. \tag{1}$$

Da φ nach Definition 1.1 additiv ist und $\varphi(1) = 1$ gilt schließen wir mit Hilfe der Identität (1)

$$\varphi(x) = \varphi(1 + 1 + ... + 1) = \varphi(1) + \varphi(1) + ... + \varphi(1) = 1 + 1 + ... + 1 = x.$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Dass $\varphi \in \mathrm{Gal}_{\mathrm{Prim}(k)}(k)$ gilt dann nach Definition der Galois-Gruppe. ■

Abschließende Bemerkung

Wir haben gesehen, dass Automorphismen von Körpern einige bemerkenswerte Eigenschaften haben. Insbesondere Satz 1.3 ist dabei zentral, da sich daraus eine direkte Verbindung zur Galois-Theorie ergibt.

Literatur

[1] Christian Karpfinger and Kurt Meyberg. *Algebra (3. Auflage)*. Spektrum Akademischer Verlag, 2013.