Transzendenz von e im Leistungskurs?*

Rudolf Fritsch

Mathematik gilt als schweres Schulfach, das aber wegen des ständigen Auftretens mathematischer Problemstellungen im täglichen Leben, insbesondere in unserer vom Computer bestimmten Zeit, unvermeidlich ist. Die Rechtfertigung für den intensiven Mathematik-Unterricht an unseren Schulen wird zumeist in den Anwendungen gesehen, die die Mathematik im Alltag hat. Darüber sollten wir aber nicht vergessen, daß der Auftrag unserer allgemeinbildenden Schulen auch dahin geht, die Schüler zu logischem Denken zu erziehen und ihnen etwas vom geistigen Hintergrund und von rein abstrakten Fragestellungen der Mathematik nahezubringen, die große Denker über Jahrhunderte bewegt haben. Einen wichtigen Themenkreis, der in diesem Zusammenhang angesprochen werden sollte, bildet sicherlich der Aufbau des Zahlensystems. Hierzu will ich heute einen Punkt besonders diskutieren: den Unterschied zwischen algebraischen und transzendenten reellen Zahlen. Zunächst erinnere ich an die Begriffsbildung:

Definition - Eine reelle Zahl x ist *algebraisch*, wenn es eine natürliche Zahl n (> 0) und ganze Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mit $a_n \neq 0$ gibt derart, daß gilt

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{1}$$

das heißt, wenn x Nullstelle einer ganzrationalen Funktion positiven Grades mit ganzen Koeffizienten ist.

Beispiele - (1) Rationale Zahlen sind algebraisch: Eine rationale Zahl x läßt sich in der Form $x = p/q$ mit $p \in \mathbf{Z}$ und $q \in \mathbf{N}$ darstellen, was auf die Gleichung

$$qx - p = 0$$

führt. Man nimmt $n = 1$, $a_0 = -p$ und $a_1 = q$.
(2) Die Zahl $x = \sqrt{2}$ ist algebraisch: Da $x^2 - 2 = 0$ gilt, kann man $n = 2$, $a_0 = -2$, $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$ nehmen.
(3) Die Zahl $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ ist algebraisch. Um das einzusehen, berechnet man zunächst $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$; das ist gleichbedeutend mit $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$. Daraus folgt durch abermaliges Quadrieren

$$x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Man findet $n = 4$, $a_0 = a_4 = 1$, $a_1 = a_3 = 0$ und $a_2 = -10$.

*Vortrag am 29. März 1988 im Rahmen der 79. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Kiel, veröffentlicht in *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht,* Band 42, Seiten 75 – 80 (1989), Kritik dazu und Antwort darauf Seiten 375 – 376 im selben Band.

Als Lehrer wissen Sie aus der Algebra-Vorlesung, daß alle Zahlen algebraisch sind, die sich aus rationalen Zahlen durch Wurzelziehen, Bilden von Linearkombinationen mit rationalen Koeffizienten und Iteration dieser Prozesse gewinnen lassen. Manchmal ist es sehr trickreich, zu einer vorgegebenen Zahl dieser Bauart eine passende Gleichung zu finden, aber es geht immer! Dadurch haben wir für den Unterricht eine Vielzahl von Beispielen und Übungsmöglichkeiten. Irgendwann sollte man dabei die folgende einfache Tatsache feststellen.

Bemerkung - Ist x eine von Null verschiedene algebraische Zahl, so kann eine Gleichung der Form (1) mit der zusätzlichen Eigenschaft $a_0 \neq 0$ gefunden werden. Ist nämlich zunächst ein $k > 0$ der kleinste Index mit $a_k \neq 0$, das heißt

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_k x^k = 0,$$

so kann man durch x^k dividieren und erhält

$$a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-1-k} + ... + a_k = 0,$$

eine Gleichung der gewünschten Art. (Unter der Voraussetzung $a_n \neq 0 \neq x$ gilt offensichtlich $k < n$, also $n - k > 0$.)

Aus Mächtigkeitsüberlegungen im Sinne der Mengenlehre folgt unmittelbar, daß es auch nicht-algebraische reelle Zahlen geben muß; über Mächtigkeiten wird man wohl im normalen Unterricht kaum reden. Da sollte man zunächst nur sagen, daß die Begriffsbildung „algebraische (reelle) Zahl“ sich nicht gelohnt hätte, wenn alle reellen Zahlen algebraisch wären, und dann den neuen Begriff einführen.

Definition - Eine reelle Zahl ist *transzendent*, wenn sie nicht algebraisch ist.

Hierbei muß man auch etwas auf die historische Entwicklung des Zahlbegriffs eingehen. Ich kann das jetzt nicht ausführen und verweise auf die Literatur: Einen kurzen Überblick zum Kapitel *algebraische* versus *transzendente* Zahlen findet man im Abschnitt 1.3.5 des neuen Tropfke [14; S. 139ff], dem Standardwerk zur Geschichte der Elementarmathematik - gemeint ist Schulmathematik - von dessen 4. Auflage allerdings bisher nur der erste Band erschienen ist; er gehört eigentlich in die Hand jedes Mathematiklehrers und sollte mindestens in jeder Lehrerbibliothek vorhanden sein! Eine ausführlichere Darstellung findet sich in dem auch sonst sehr lesenwerten Aufsatz von Artmann, Spalt und Gerecke: *Transzendenzbeweis für e gestern und heute* [2], der in den Mathematischen Semesterberichten, im zweiten Heft des Jahrgangs 1987 erschienen ist; auch diese Zeitschrift kann ich engagierten Mathematiklehrern wärmstens empfehlen. Jetzt möchte ich nur darauf hinweisen, daß die endgültige Klärung des Transzendenzbegriffes um das Jahr 1840 durch den französischen Mathematiker Joseph Liouville erfolgte, der auch die ersten Transzendenzbeweise führte [11]. Die von ihm als transzendent erkannten Zahlen heißen heute zu seinen Ehren „Liouvillesche Zahlen“; sie werden in Artmanns Buch: *Der Zahlbegriff* [1] ausführlich dargestellt, eignen sich jedoch meines Erachtens nicht so sehr für den gymnasialen Unterricht, weil sie recht künstlich und nur für diesen Zweck konstruiert sind, sonst im mathematischen Alltag aber nicht auftreten. Interessant erscheint die Frage nach der Transzendenz bei Zahlen wie der Kreiszahl π - das hängt mit dem uralten Problem der Quadratur des Kreises zusammen - und der Eulerschen Zahl e, der Basis der Exponentialfunktion und der natürlichen Logarithmen. Der ebenfalls französische Mathematiker CHARLES HERMITE konnte im Jahr 1873 [6] zeigen:

Die Eulersche Zahl e ist transzendent.

Darauf aufbauend, unter zusätzlicher Benutzung der Integration im Komplexen bewies der Deutsche FERDINAND LINDEMANN im Jahr 1882 [10]:

Die Kreiszahl π ist transzendent.

Es dürfte von vornherein jedem Schüler klar sein, daß der Nachweis der Transzendenz einer vorgelegten Zahl, zu dem man alle ganzrationalen Funktionen positiven Grades mit ganzen Koeffizienten in Betracht zu ziehen hat, sich im allgemeinen wesentlich schwieriger gestalten wird als das Aufsuchen geeigneter Koeffizienten für eine gegebene algebraische Zahl. Insofern kann man sich fragen, ob echte Transzendenzbeweise in der Schule überhaupt behandelt werden können. Ich bin der Meinung, daß das für die Eulersche Zahl durchaus möglich ist. Im Gegensatz zu den Herren ARTMANN, SPALT und GERECKE, die ein integrationsfreies, von Herrn KARCHER beschriebenes, auf A. HURWITZ [8] zurückgehendes Verfahren benutzen, möchte ich jedoch vorschlagen, den Ideen von HILBERT zu folgen, dem im Jahre 1893 eine wesentliche Vereinfachung [7] der HERMITEschen und LINDEMANNschen Überlegungen gelang. Die zusätzlichen „Elementarisierungen“, etwa auch durch Zurückführung auf Potenzreihen wie in PERRONs Buch: *Irrationalzahlen* [13] haben meines Erachtens keine echten Vereinfachungen mehr gebracht. Leider geht dasselbe nicht für Transzendenz von π; auch der HILBERTsche Beweis verwendet die Integration im Komplexen, die in der Schule nicht zur Verfügung steht.
Bevor ich nun auf Einzelheiten des Beweises der Transzendenz von e eingehe, möchte ich Herrn Oberstudiendirektor KRATZ, der es vermittelte, und Herrn Oberstudienrat KOLLMANN, Kursleiter eines Leistungskurses der 13. Jahrgangsstufe am MAX-BORN-GYMNASIUM in Germering bei München, der es ermöglichte und vorbereitete, dafür danken, daß ich meine Vorstellungen auch einmal in zwei Schulstunden, genauer: in einer durch eine Pause unterbrochenen Doppelstunde, wirklich ausprobieren konnte. Ich habe natürlich nicht mit Hilfe eines Testes nachgeprüft, wieviel von meinem Unterricht bei den Schülern hängen geblieben ist; aber ich hatte doch den Eindruck - und Herr KRATZ, der ja hier anwesend ist - wird das wohl bestätigen - daß die Schüler meinem Unterrichtsversuch mit einem gewissen Verständnis folgten.
Der Beweis geht nicht direkt von einer möglichen Definition von e aus, sondern er verwendet eine abgeleitete Eigenschaft der Exponentialfunktion. Er baut auf der folgenden Tatsache auf.
Beweisgrundlage: *Für alle $k \in \mathbf{N}_0$ gilt*

$$\int_0^\infty x^k \cdot e^{-x} dx = k! \quad . \tag{2}$$

Das ist mit Hilfe partieller Integration und vollständiger Induktion leicht zu beweisen. In den bayerischen Lehrplänen ist allerdings die Behandlung der vollständigen Induktion nicht mehr vorgesehen und die partielle Integration kommt erst am Schluß des Leistungskurses, wenn man für die Transzendenz von e sicherlich keine Zeit mehr hat. Für meinen Unterrichtsversuch hat der Kursleiter diese Eigenschaft nach meinem folgenden Vorschlag hergeleitet (hinter dem sich natürlich beide Methoden verbergen, was man im Unterricht nicht zu sagen braucht): Zunächst zeigt man (siehe etwa [3, S. 104])

$$\lim_{x\to\infty} x^k \cdot e^{-x} = 0 \qquad \text{für alle } k \in \mathbf{N}_0. \tag{3}$$

Ebenfalls für alle $k \in \mathbf{N}_0$ sei dann f_k die durch

$$x \longmapsto x^k \cdot e^{-x} \quad ; \quad x \in \mathbf{R}$$

definierte Funktion und F_k sei die (wegen der Stetigkeit von f_k existierende und) durch die Bedingung $F_k(0) = 0$ eindeutig bestimmte Stammfunktion zu f_k. Durch Differenzieren bestätigt man, daß für $k > 0$ auch die Funktion

$$\bar{F}_k : x \longmapsto k \cdot F_{k-1}(x) \quad - \quad x^k \cdot e^{-x} \quad ; \quad x \in \mathbf{R}$$

eine Stammfunktion zu f_k ist. Da die Differenz zweier Stammfunktionen zur gleichen Funktion eine konstante Funktion und $\bar{F}_k(0) = 0 = F_k(0)$ ist, gilt

$$\bar{F}_k \quad = \quad F_k \quad . \tag{4}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^k e^{-x} dx \quad &= \quad \lim_{\bar{x}\to\infty} \int_0^{\bar{x}} x^k e^{-x} dx = \\
&\qquad \text{nach Definition des uneigentlichen Integrals} \\
&= \quad \lim_{\bar{x}\to\infty} (F_k(\bar{x}) - F_k(0)) \;=\; \lim_{\bar{x}\to\infty} F_k(\bar{x}) \;= \\
&\qquad \text{nach } F_k(0) = 0 \\
&= \quad \lim_{\bar{x}\to\infty} \bar{F}_k(\bar{x}) \;=\; \lim_{\bar{x}\to\infty} (k \cdot F_{k-1}(\bar{x}) - \bar{x}^k \cdot e^{-\bar{x}}) \;= \\
&\qquad \text{nach (4) und Definition von } \bar{F}_k \\
&= \quad \lim_{\bar{x}\to\infty} k \cdot F_{k-1}(\bar{x}) \;=\; k \cdot \lim_{\bar{x}\to\infty} F_{k-1}(\bar{x}) \\
&\qquad \text{nach (3),}
\end{aligned}$$

falls nur $\lim_{\bar{x}\to\infty} F_{k-1}(\bar{x})$ existiert. Nun gilt aber $F_0(\bar{x}) = 1 - e^{-\bar{x}}$ für alle $\bar{x} \in \mathbf{R}$; also existiert $\lim_{\bar{x}\to\infty} F_0(\bar{x})$ und hat den Wert 1. Die Gleichungskette zeigt, daß daraus der Reihe nach folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty x \cdot e^{-x} dx &= \lim_{\bar{x}\to\infty} F_1(\bar{x}) = 1 \\
\int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x} dx &= \lim_{\bar{x}\to\infty} F_2(\bar{x}) = 2 \\
\int_0^\infty x^3 \cdot e^{-x} dx &= \lim_{\bar{x}\to\infty} F_3(\bar{x}) = 6 \\
&\vdots \\
\int_0^\infty x^k \cdot e^{-x} dx &= \lim_{\bar{x}\to\infty} F_k(\bar{x}) = k! \quad ,
\end{aligned}
$$

was zu beweisen war. Nebenbei sei noch bemerkt, daß die Gleichung (4) eine explizite Darstellung der Funktionen F_k durch rekursive Berechnung ermöglicht und daß die Gleichung (2) für die Definition der Γ-Funktion von grundlegender Bedeutung ist.
Als **Hilfsmittel** werden der für alle $x \in \mathbf{R}$ geltende Grenzwert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x^k}{k!} = 0 \tag{5}$$

und die verallgemeinerte Dreiecksungleichung benötigt:

Für beliebige reelle Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gilt

$$|x_0 + x_1 + \ldots + x_n| \leq |x_0| + |x_1| + \ldots + |x_n|. \tag{6}$$

Zum Nachweis des Grenzwertes (5) überlegt man, daß das $(k+1)$-ste Folgenglied aus dem k-ten Glied durch Multiplikation mit dem Faktor $x/(k+1)$ entsteht. Bei gegebenem x gilt für alle $k > 2|x|$, daß der hinzukommende Faktor kleiner als $1/2$ ist, also von einer bestimmten Stelle an das nächste Glied immer - dem Betrage nach - kleiner ist als die Hälfte des vorangehenden. Damit muß es sich um eine Nullfolge handeln. - Die verallgemeinerte Dreiecksungleichung (6) ist offensichtlich richtig, wenn alle auftretenden x_i das gleiche Vorzeichen haben; dann gilt sogar Gleichheit. Im anderen Fall hebt sich auf der linken Seite einiges auf, während rechts weiterhin alle x_i ihren vollen Betrag einbringen.

Nun wenden wir uns dem eigentlichen Beweis zu. Er wird üblicherweise in der Form eines Widerspruchsbeweises geführt. Die Erfahrung zeigt aber, daß man sich dabei häufig fragt, wo der Widerspruch eigentlich steckt. Es hat sich unter Mathematikern die Unsitte eingeschlichen, daß man nahezu alles und jedes durch Widerspruch beweist, obwohl oft der direkte Weg einfacher ist; dies sollte man sich möglichst abgewöhnen. Auch hier ist der Beweisansatz viel leichter zu verstehen, wenn man die zu beweisende Aussage positiv formuliert. Man zeigt:

Für jede Wahl von $n \in \mathbf{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Z}$ mit $a_0 \neq 0$ und $a_n \neq 0$ gilt

$$a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ldots + a_2 e^2 + a_1 e + a_0 \neq 0. \tag{7}$$

Beweisidee: Es seien solche Zahlen n, a_0, ... , a_n vorgegeben. Wir konstruieren Zahlen r, $s \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{Z}$ derart, daß gilt

$$r \cdot (a_n e^n + a_{n-1} e^{n-1} + \ldots + a_2 e^2 + a_1 e + a_0) = s + p \tag{8}$$

mit

$$|s| < 1 \tag{9}$$

und

$$p \neq 0. \tag{10}$$

Da p eine ganze Zahl sein soll, ergibt sich aus (9) und (10), daß die rechte Seite der Gleichung (8) von Null verschieden ist; dann kann aber auch keiner der Faktoren links verschwinden, woraus (7) folgt. (Ähnliche Ideen liegen auch anderen Transzendenz-, sowie Irrationalitätsbeweisen zugrunde.)

Zur **Ausführung** dieser Idee definieren wir zwei Hilfsfunktionen:

$$g : x \longmapsto x(x-1)(x-2)...(x-n); \quad x \in \mathbf{R},$$

$$h : x \longmapsto (x-1)(x-2)...(x-n)e^{-x}; \quad x \in \mathbf{R}.$$

Außerdem fixieren wir ein $k \in \mathbf{N}$, zunächst beliebig, aber später so, daß gewisse Bedingungen erfüllt sind, und definieren damit eine weitere Funktion

$$f : x \longmapsto g(x)^k \cdot h(x); \quad x \in \mathbf{R},$$

das heißt

$$f(x) = x^k \cdot [(x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n)]^{k+1} \cdot e^{-x} \quad \text{für alle } x \in \mathbf{R}.$$

Multiplizieren wir die auftretenden Klammern aus, so erhalten wir für $f(x)$ eine Darstellung der Form

$$f(x) = e^{-x} \cdot \sum_{j=k}^{k+n(k+1)} b_j \cdot x^j \tag{11}$$

mit $b_j \in \mathbf{Z}$ für alle vorkommenden j. Insbesondere haben wir $b_k = \pm(n!)^{k+1}$; auf das Vorzeichen von b_k und die genauen Werte der übrigen b_j $(j > k)$ kommt es im folgenden nicht an.
Hier möchte ich eine Überraschung erwähnen, die ich bei meinem Unterricht erlebte. Ich kenne die große Scheu vor der Verwendung des Summenzeichens „$\sum$“ im Schulunterricht; es wird zwar in den Lehrbüchern eingeführt (siehe zum Beispiel [9; S. 193]), aber der Umgang damit wird nicht geübt. So versuchte ich es auch hier zu umgehen und sagte den Schülern etwa das folgende: Durch Ausmultiplizieren erhält man eine Summe von Termen der Form $b \cdot x^j$ mit $k \leq j \leq k + n(k+1)$ und $b \in \mathbf{Z}$. Im Fall $j = k$ hat b den speziellen Wert $\pm(n!)^{k+1}$. Dann habe ich im folgenden immer nur entsprechende Summanden einzeln angeschrieben und gesagt, daß man sich dabei die ganzen Summen denken müsse. Das kam gar nicht an, die Schüler konnten sich das Zusammenspiel dieser Summanden nicht vorstellen. Glücklicherweise wurde

der Unterricht an dieser Stelle durch die Pause unterbrochen, in der mir die Schüler klarmachten, daß sie die Sache mit Verwendung des Summenzeichens besser verstehen würden.

Zurück zum Thema: Wir betrachten das Integral

$$w_0 = \int_0^\infty f(x)dx \quad = \sum_{j=k}^{k+n(k+1)} b_j \cdot \int_0^\infty x^j \cdot e^{-x} dx \quad .$$

Wegen (2) sind die einzelnen Integrale unter der Summe ganze, durch $k!$ teilbare, für $j > k$ sogar durch $(k+1)!$ teilbare Zahlen. Da auch alle Koeffizienten b_j ganze Zahlen sind, ergibt sich

$$w_0 = \pm(n!)^{k+1} \cdot k! + c_0 \cdot (k+1)! \tag{12}$$

mit $c_0 \in \mathbf{Z}$. Wir setzen

$$r = \frac{w_0}{k!} = \pm(n!)^{k+1} + c_0 \cdot (k+1) \quad ; \tag{13}$$

später werden wir Bedingungen für die noch beliebige Zahl k formulieren, die garantieren, daß die so definierte Zahl r tatsächlich zur Herstellung einer Gleichung der Form (8) mit den angegebenen Nebenbedingungen verwendet werden kann.

Als nächsten Schritt spalten wir w_0 für $i = 1, \ldots, n$ auf in der Form

$$w_0 = v_i + w_i$$

mit

$$v_i = \int_0^i f(x)dx \qquad , \qquad w_i = \int_i^\infty f(x)dx \quad .$$

So erhalten wir für $r \cdot (a_n e^n + a_{n-1}e^{n-1} + \ldots + a_2 e^2 + a_1 e + a_0)$ eine Zerlegung der Form

$$\frac{v_n a_n e^n + \ldots + v_1 a_1 e}{k!} \quad + \quad \frac{w_n a_n e^n + \ldots + w_1 a_1 e + w_0 a_0}{k!} \quad ;$$

es bleibt zu zeigen, daß bei geeigneter Wahl von k die Zahlen

$$s = \frac{v_n a_n e^n + \ldots + v_1 a_1 e}{k!}$$

und

$$p = \frac{w_n a_n e^n + \ldots + w_1 a_1 e + w_0 a_0}{k!}$$

die geforderten Eigenschaften haben.

Betrachten wir zunächst p. Der Graph der Funktion f, eingeschränkt auf den Bereich $x \geq i$, bestimmt dieselbe Fläche wie der Graph der Funktion $\tilde{f} \,:\, \tilde{x} \mapsto f(\tilde{x} + i) \;;\; \tilde{x} \geq 0 \quad$. Also gilt für $i > 0$

$$w_i = \int_0^\infty (\tilde{x} + i)^k [(\tilde{x} + i - 1)(\tilde{x} + i - 2) \ldots \tilde{x} \ldots (\tilde{x} + i - n)]^{k+1} e^{-\tilde{x} - i} d\tilde{x} \quad .$$

Das ist natürlich eine Integration durch Substitution. Diese Integrationsmethode war meinen Schülern noch nicht bekannt. Da es sich hier aber nur um eine einfache Verschiebung der Ursprungs handelt, hatten sie keine Schwierigkeiten.
Indem wir den Faktor e^{-i} aus dem Integral herausziehen und die Integrationsvariable wieder in x umbenennen, erhalten wir

$$w_i = e^{-i} \cdot \int_0^\infty (x+i)^k [(x+i-1)(x+i-2)\dots x \dots (x+i-n)]^{k+1} e^{-x} dx \quad .$$

Da in der eckigen Klammer das x „rein“ vorkommt, ist der Integrand nun von der Form

$$\sum_{j=k+1}^{k+n(k+1)} \tilde{b}_j \cdot x^j$$

mit $\tilde{b}_j \in \mathbf{Z}$ für alle vorkommenden j, das heißt

$$w_i = e^{-i} \cdot \sum_{j=k+1}^{k+n(k+1)} \tilde{b}_j \int_0^\infty x^j e^{-x} dx \quad .$$

Jetzt folgt aus (2), daß jedes einzelne Integral unter der Summe durch $(k+1)!$ teilbar ist, das heißt, daß w_i die Form

$$w_i = e^{-i} \cdot c_i \cdot (k+1)!$$

mit $c_i \in \mathbf{Z}$ besitzt. Zusammenfassend ergibt sich deshalb

$$\begin{aligned} p &= (c_n a_n + \ldots + c_1 a_1 + c_0 a_0) \cdot (k+1) \quad \pm \quad (n!)^{k+1} \cdot a_0 \quad = \\ &= c \cdot (k+1) \quad \pm \quad (n!)^{k+1} \cdot a_0 \end{aligned}$$

mit $c \in \mathbf{Z}$. Also ist p eine ganze Zahl und sicherlich dann von Null verschieden, wenn wir k so wählen, daß $k+1$ eine genügend große Primzahl ist, größer als n und a_0. (Da $(n!)^{k+1} \cdot a_0$ sicherlich von Null verschieden ist, könnte ja p nur dann gleich Null sein, wenn $(n!)^{k+1} \cdot a_0$ durch $k+1$ teilbar wäre; das ist aber bei einer solchen Wahl von k ausgeschlossen.)

Zur Untersuchung von s betrachten wir die Einschränkungen der Funktionen g, h und f auf das Intervall $[0, n]$. Da es sich dabei wieder um stetige Funktionen handelt, sind sie beschränkt, das heißt, es gibt zunächst positive reelle Zahlen G, H derart, daß für alle $x \in [0, n]$ gilt

$$|g(x)| \leq G \quad , \quad |h(x)| \leq H \quad ,$$

woraus für diesselben x folgt

$$|f(x)| \leq G^k \cdot H \quad .$$

Sollte der Satz von der Beschränktheit stetiger Funktionen auf endlichen abgeschlossen Intervallen nicht zur Verfügung stehen, so kann man auch direkt Schranken angeben. Für alle $x \in [0, n]$ gilt ja offensichtlich

$$|g(x)| \leq n^{n+1} \qquad , \qquad |h(x)| \leq n^n \qquad ;$$

wir nehmen $G = n^{n+1}$, $H = n^n$.
Ohne Betragszeichen läßt sich diese Ungleichung als Doppelungleichung schreiben:

$$-G^k \cdot H \leq f(x) \leq G^k \cdot H \quad ,$$

Daraus folgen für $i = 1, \ldots, n$ die Integralabschätzungen

$$-G^k \cdot H \cdot i \leq v_i \leq G^k \cdot H \cdot i \quad ,$$

das heißt in der Betragsschreibweise

$$|v_i| \leq G^k \cdot H \cdot i \quad .$$

Fassen wir diese zusammen, so erhalten wir mit Hilfe der verallgemeinerten Dreiecksungleichung (6)

$$\begin{aligned} |s| \cdot k! &= |v_n a_n e^n + \ldots + v_1 a_1 e| \leq \\ &\leq |v_n a_n e^n| + \ldots + |v_1 a_1 e| \leq \\ &\leq G^k \cdot H \cdot (n \cdot |a_n| \cdot e^n + \ldots + 1 \cdot |a_1| \cdot e) \end{aligned}$$

wobei die Zahl

$$z = H \cdot (n \cdot |a_n| \cdot e^n + \ldots + 1 \cdot |a_1| \cdot e)$$

nicht von k abhängt. Aus (5) folgt nun

$$\lim_{k \to \infty} \frac{G^k \cdot z}{k!} = (\lim_{k \to \infty} \frac{G^k}{k!}) \cdot z = 0 \quad ,$$

also für genügend großes k

$$|s| \leq \frac{G^k \cdot z}{k!} < 1 \quad .$$

Da es unendlich viele Primzahlen gibt, läßt sich nun sicher ein k finden derart, daß $|s| < 1$ und $p \neq 0$ ist. **qed**
Daß der Satz von der Existenz unendlich vieler Primzahlen hier einmal angewandt werden kann, das war für die Schüler das i-Tüpfelchen auf meinem Unterrichtsversuch. - Sie haben gesehen, daß der Beweis, den ich hier vorgeführt habe, nur Begriffe und Methoden verwendet, die in normalen Leistungskursen behandelt werden. Einzelne Schritte können durchaus als Beispiel- und Übungsmaterial in den laufenden Unterricht eingebracht werden, vielleicht in noch expliziterer Form, etwa indem man das Integral w_0 für kleine Werte von n und k vollständig auswertet. Ich meine; daß bei entsprechender Planung und Vorbereitung wirklich nicht mehr als eine Doppelstunde notwendig ist, um diesen Beweis im Unterricht durchzuführen. - Interessanter für die Schüler wäre natürlich noch ein darstellbarer Transzendenzbeweis für die Kreiszahl π; aber - wie schon gesagt - ein solcher liegt nicht vor. Mit der Aufforderung an Sie, danach zu suchen, möchte ich schließen.

ANHANG

In der Diskussion zum Vortrag wurde nach einfachen Beweisen für die Irrationalität von π gefragt. Der derzeit wohl einfachste für die Schule stammt von I. Niven [12] und verläuft folgendermaßen. Angenommen, $\pi = p/q$ mit $p \in \mathbf{Z}$ und $q \in \mathbf{N}$. Abhängig von einem zunächst beliebigen $k \in \mathbf{N}$ definiert man Hilfsfunktionen

$$f : x \longmapsto \frac{x^k \cdot (p - qx)^k}{k!}; \quad x \in \mathbf{R},$$

$$F : x \longmapsto f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^k f^{(2k)}(x); \quad x \in \mathbf{R}.$$

Nun stellt man fest, daß die Funktion f und alle ihre Ableitungen, also auch die Funktion F, an den Stellen 0 und π nur ganzzahlige Werte annehmen. Ferner bestätigt man durch Differenzieren, daß die Funktion

$$G : x \longmapsto F'(x) \cdot \sin x - F(x) \cdot \cos x; \quad x \in \mathbf{R},$$

eine Stammfunktion der Funktion

$$g : x \longmapsto f(x) \cdot \sin x; \quad x \in \mathbf{R}$$

ist. Daraus folgt, daß das Integral

$$\int_0^\pi g(x)\mathrm{d}x = G(x)|_0^\pi = F(\pi) + F(0)$$

für jede Wahl von $k \in \mathbf{N}$ eine ganze Zahl ist. Nun gilt aber für alle $x \in (0, \pi)$

$$0 < g(x) < \frac{\pi^k \cdot p^k}{k!} ,$$

das heißt,

$$0 < \int_0^\pi g(x)\mathrm{d}x < \pi \cdot \frac{(\pi \cdot p)^k}{k!} .$$

Für genügend großes k ist nun wegen des Grenzwertes (5) der Wert rechts kleiner als 1 und damit $\int_0^\pi g(x)\mathrm{d}x$ sicherlich keine ganze Zahl. Widerspruch!

Um die Unlösbarkeit des Problems von der Quadratur des Kreises zu zeigen, würde bekanntlich der Nachweis genügen, daß die Zahl π keiner algebraischen Erweiterung des Körpers der rationalen Zahlen von einem Grad 2^m mit $m \in \mathbf{N}_0$ angehört. Obwohl diese Behauptung viel schwächer zu sein scheint als die Transzendenz von π ist dafür kein einfacher Beweis bekannt. Ein Schritt in dieser Richtung, nämlich ein schulgemäßer Beweis der Irrationalität von π^2 gelang dem Japaner Y. Iwamoto; seine entsprechende Variation des skizzierten Nivenschen Beweises ist in dem auch sehr empfehlenswerten, aber durchaus anspruchsvollen Buch *Zahlen* [4] dargestellt.

Ich danke Herrn Studiendirektor v. Keller, Hamburg, für den Hinweis, daß man in [5] eine auf den Unterricht zugeschnittene Ausarbeitung des hier skizzierten Beweises der Irrationalität von π finden kann.

Literatur

1. B. Artmann: *Der Zahlbegriff.* Göttingen 1983 (Vandenhoeck & Ruprecht)

2. B. Artmann - D. D. Spalt - W. Gerecke: *Transzendenzbeweis für e gestern und heute.* Mathematische Semesterberichte **34**, *187-219* (1987)

3. M. Baierlein - F. Barth - U. Greifenegger - G. Krumbacher: *Anschauliche Analysis 2.* München 1981 (Ehrenwirth)

4. H.-D. Ebbinghaus - H. Hermes - F. Hirzebruch - M. Koecher - K. Mainzer - A. Prestel - R. Remmert: *Zahlen* (= Grundwissen Mathematik **1**). Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo 1983 (Springer - Verlag)
   darin: Kapitel 5 *Was ist* π ? (Remmert)

5. Education Development Center: *UMAP Modules 1977-1979, Tools for Teaching.* Boston - Basel - Stuttgart 1981 (Birkhäuser)

6. C. Hermite: *Sur la fonction exponentielle.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **77**, *18-24, 74-79, 226-233, 285-293* (1873)

7. D. Hilbert: *Über die Transcendenz der Zahlen e und* π. Mathematische Annalen **43**, *216-219* (1893)

8. A. Hurwitz: *Beweis der Transcendenz der Zahl e.* Mathematische Annalen **43**, *220-221* (1893)

9. K.-A. Keil - J. Kratz - H. Müller - K. Wörle: *Infinitesimalrechnung 2.* München 1986 (Bayerischer Schulbuchverlag)

10. F. Lindemann: *Über die Zahl* π. Mathematische Annalen **20**, *213-225* (1882)

11. J. Liouville: *Sur les classes très-étendus de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même reductible à des irrationeles algébrique.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris **18**, *883-885* (1844); Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1) **16**, *133-142* (1851)

12. I. Niven: *A simple proof that π is irrational.* Bulletin of the American Mathematical Society **53**, *509* (1947)

13. O. Perron: *Irrationalzahlen.* Göschens Lehrbücherei Band 1. Berlin 1960 (de Gruyter)

14. J. Tropfke: *Geschichte der Elementarmathematik,* 4. Aufl., Band 1 · *Arithmetik und Algebra.* Berlin - New York 1980 (de Gruyter)