Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

13. Übungsblatt – Lösungsskizze

Aufgabe H34

1. Mit $p = (x, y, z)^t$ gilt $D_p f = \big(4x(x^2 + y^2 - 2, 4y(x^2 + y^2 - 2), 8z)\big)$. Damit verschwindet $D_p f$ falls entweder $p = 0$ oder $x^2 + y^2 = 2$ und $z = 0$ gilt. Beide Fällte können auf S_f nicht auftreten, also ist S_f eine Fläche nach Satz IV.1.2

2. Falls $1 < x^2 + y^2 < 3$, dann gilt

$$\begin{aligned} 4z^2 &= 1 - (x^2 + y^2 - 2)^2 \\ \Leftrightarrow z &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{1 - (x^2 + y^2 - 2)^2} \end{aligned}$$

   Es ist

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 3 \right\}$$

   offen (ein offener Kreisring) und

$$F \colon U \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{2}\sqrt{1 - (x^2 + y^2 - 2)^2} \end{pmatrix}$$

   glatt (die Bedingung $1 < x^2 + y^2 < 3$ stellt dabei gerade sicher, dass der Ausdruck unter der Wurzel immer größer Null ist, wo die Wurzelfunktion glatt ist). Dabei nimmt F Werte auf S_f an, da $z = \frac{1}{2}\sqrt{1 - (x^2 + y^2 - 2)^2}$ sicherstellt, dass $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ein Element von S_f ist. Ferner gilt

$$F(U) = S_f \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z > 0 \right\}$$

   (warum genau?) und auf $F(U)$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{1}{2}\sqrt{1 - (x^2 + y^2 - 2)^2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   eine stetige Umkehrfunktion. Damit ist F eine lokale Parametrisierung.

3. Es ist $(1, 1, 2)^t$ bereits in $F(U)$ aus Teil 2. enthalten.

4. Wählen wir in Teil 2. das andere Vorzeichen von z, so erhalten wir die lokale Parametrisierung

$$F\colon U \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -\frac{1}{2}\sqrt{1-(x^2+y^2-2)^2} \end{pmatrix},$$

für die $(1,1,-2)^t$ in $F(U)$ enthalten ist.

Aufgabe H35

1. Dies ist ein Funktionsgraph, eine lokale Parametrisierung ist also nach dem Beispiel hinter Definition IV.1.1 gegeben durch

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^3-3xy^2 \end{pmatrix}.$$

2. Es ist

$$S_f \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ein Diffeomorphismus (vgl. H31).

3. Eine Basis von $T_{F((x,y)^t)}S_{\mathrm{Aff}}$ ist gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial x}((x,y)^t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3x^2-3y^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}((x,y)^t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6xy \end{pmatrix}.$$

4. Ein glattes Normalenfeld auf S_{Aff} ist gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial x}((x,y)^t) \times \frac{\partial F}{\partial y}((x,y)^t) = \begin{pmatrix} -(3x^2-3y^2) \\ -6xy \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

wobei $\times$ das Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

5. Um ein Einheitsnormalenfeld auf S_{Aff} zu erhalten müssen wir (1) nur normieren:

$$N\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ x^3-3xy^2 \end{pmatrix}\right) = \frac{-1}{\sqrt{9x^4+9y^4+18x^2y^2-1}} \begin{pmatrix} (3x^2-3y^2) \\ 6xy \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6. Wir betrachen die glatte Kurve

$$\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Diese verläuft in S_{Aff} und es gilt $\gamma(0) = 0$ und $\dot{\gamma}(0) = (1,0,0)^t = \frac{\partial F}{\partial x}(0)$. Komponieren wir γ mit N so erhalten wir die Kurve

$$t \mapsto \frac{-1}{\sqrt{9t^4 - 1}} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ableiten und $t = 0$ einsetzen ergibt dann den Vektor 0. Also ist $(1,0,0)^t$ eine Hauptkrümmungsrichtung zur Hauptkrümmung 0.

Der Vektor $(0,1,0)^t$ wird durch die Kurve

$$\eta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

repräsentiert. Die Komposition mit N ergibt

$$t \mapsto \frac{-1}{\sqrt{9t^4 - 1}} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann zeigt das gleiche Argument wie oben, dass der Vektor $(0,1,0)^t$ eine Hauptkrümmungsrichtung zur Hauptkrümmung 0 ist.

7. Die Gauß-Krümmung ist einfach das Produkt der beiden Pauptkrümmungen, also 0.

8. Eine Gerade haben wir bereits gesehen, dies ist das Bild der Kurve η. Da der Affensattel offenbar symmetrisch unter einer Rotation um 120 Grad um die z-Achse ist erhält man die anderen beiden Geraden durch eine Rotation der oben genannten Geraden wie beschrieben.

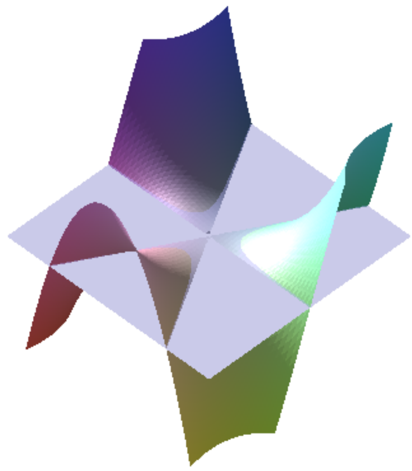

Abbildung 1: Schnitt von $T_0 S_{\text{Aff}}$ mit S_{Aff}