Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SS 2012

12. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P33

Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ glatt. Nach Satz IV.1.3 ist für jede lokale Parametrisierung F_2 von S_2 die Abbildung $F_2^{-1} \circ f$ glatt. Nach Satz IV.1.6 ist nun auch $F_2^{-1} \circ f \circ F_1$ für jede lokale Parametrisierung von S_1 glatt, was äquivalent zur Aussage ist.
Die durch eine orthogonale Matrix A dargestellte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto Ax$ ist als lineare Abbildung glatt und überführt $\mathbb{S}^2$ in sich (warum?). Wenn wir $\mathbb{S}^2$ mit den Flächen S_i von eben identifizieren, so sehen wir, dass auch $f|_{\mathbb{S}^2}$ glatt ist.

Aufgabe P34

Wir rechnen nach, dass für alle $(x, y) \in U$ gilt:

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Demnach gilt für $p \in S$ mit $p = (x, y, \varphi(x, y))$:

$$T_pS = Df_{(x,y)}(\mathbb{R}) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)+b\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für beliebige $u, v, w, z \in \mathbb{R}$ berechnet sich nun die erste Fundamentalform am Punkt p folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & g_p\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ u\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)+v\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ z \\ w\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)+z\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \right) \\ &= uw \cdot \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\right)^2\right) + (uz + vw) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) + vz \cdot \left(1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\right)^2\right). \end{aligned}$$

In der Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \right)$ von T_pS lässt sich g_p also durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\right)^2 & \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) & 1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\right)^2 \end{pmatrix}$$

darstellen.

Aufgabe P35

Sei $p \in \mathbb{S}^2$ beliebig und f wie in der Aufgabenstellung. Sei ferner $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{S}^2$ eine glatte parametrisierte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = X \in T_p\mathbb{S}^2$. Da f eine lineare Abbildung ist, gilt

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)|_{t=0} = A\frac{d}{dt}\gamma|_{t=0} = A(X).$$

Damit ist $T_pf = A|_{T_p\mathbb{S}^2} : T_p\mathbb{S}^2 \to T_{Ap}\mathbb{S}^2$. Da A eine orthogonale Matrix ist, ist A von vollem Rang und somit gilt tatsächlich $T_pf(T_p\mathbb{S}^2) = T_{Ap}\mathbb{S}^2$, d.h. T_pf ist surjektiv.

Hausübungen

Aufgabe H31

1. Wir müssen zeigen, dass f glatt und bijektiv ist und eine glatte Umkehrabbildung besitzt. Nach Aufgabe **P34** können wir S_1 durch die Abbildung $F_1(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))$ parametrisieren, ferner beschreiben wir S_2 durch $F_2(x, y) = (x, y, 0)$. Dies ist wirklich eine Parametrisierung, da die Komponentenfunktionen glatt sind und die Jacobi-Matrix stets Rang 2 besitzt. Insbesondere sind die $F_i : U \to S_i$ für $i = 1, 2$ Homöomorphismen, wobei die Umkehrfunktionen durch $F_2^{-1}(x, y, z) = (x, y) = F_1^{-1}(x, y, z)$ gegeben sind. Wir können daher $f = F_2 \circ F_1^{-1}$ schreiben. Nach Satz IV.1.3 ist f als Komposition glatter Abbildungen selbst glatt. Außerdem ist f als Komposition bijektiver Abbildungen selbst bijektiv. Die Umkehrabbildung ist durch $f^{-1} := F_1 \circ F_2^{-1}$ gegeben, da
$$f \circ f^{-1} = F_2 \circ F_1^{-1} \circ F_1 \circ F_2^{-1} = \mathrm{id} = F_1 \circ F_2^{-1} \circ F_2 \circ F_1^{-1} = f^{-1} \circ f.$$
Da f^{-1} schließlich eine Komposition aus glatten Funktionen ist, ist f ein Diffeomorphismus.

2. Sei $p \in S_1$ beliebig und f wie in Teil (1). Sei ferner $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$ eine glatte parametrisierte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = X \in T_pS_1$. Da wir aus Teil (1) wissen, dass $F_2 \circ F_1^{-1} = f$ ist, rechnen wir mit der Kettenregel
$$d_pf(X) = \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(F_2\circ F_1^{-1}\circ\gamma)|_{t=0} = D_{u_0}F_2(F_1^{-1}(X))\circ D_{u_0}F_1^{-1}(X) = (X_1, X_2, 0)^T.$$
Die Kettenregel können wir hier anwenden, da F_2 und F_1^{-1} auf offenen Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$ definiert sind.
Alternativ können wir die in Aufgabe **P34** bestimmte Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\right)$ von $T_{F_1(x,y)}S_1$ benutzen und direkt ausrechnen, dass
$$T_{F_1(x,y)}f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\end{pmatrix}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0}\, f\left(\begin{pmatrix} x+t \\ y \\ \varphi(x+t,y)\end{pmatrix}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0}\begin{pmatrix} x+t \\ y \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$$
und
$$T_{F_1(x,y)}f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0}\, f\left(\begin{pmatrix} x \\ y+t \\ \varphi(x,y+t)\end{pmatrix}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0}\begin{pmatrix} x \\ y+t \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$$
gilt.

Aufgabe H32

1. Es ist klar, dass f stetig ist, da f stetig in seinen Komponenten ist.
Eine beidseitige Umkehrfunktion $f^{-1} : S_c \to I \times]0, 2\pi[$ von f ist gegeben durch
$$f^{-1}\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w\end{pmatrix}\right) = \left(c^{-1}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{u^2+v^2} \\ w\end{pmatrix}\right), \arccos\left(\frac{u}{c_1\left(c^{-1}\left(\begin{pmatrix} \sqrt{u^2+v^2} \\ w\end{pmatrix}\right)\right)}\right)\right).$$

Die Umkehrfunktion $c^{-1} : c(I) \to I$ von c ist glatt, was aus dem Satz über die Umkehrfunktion zusammen mit der Tatsache, dass c injektiv und glatt ist und dass $Dc_{(x)} = 0$ für alle $x \in I$ gilt, folgt. Somit ist c^{-1} insbesondere stetig. Daraus wiederum folgt, dass f^{-1} stetig ist, da f^{-1} komponentenweise durch Verknüpfung und Multiplikation von stetigen Funktionen entsteht. Insgesamt folgt, also, dass $f : I \times]0, 2\pi[\to S_c$ ein Homöomorphismus ist.

2. f ist glatt, da c_1, c_2 und die trigonometrischen Funktionen glatt sind und somit alle partiellen Ableitungen der Form $\frac{\partial^{m+n} f_i}{\partial x^m \partial y^n}(x, y)$ für $n, m \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, 2, 3\}$ existieren und stetig sind.

   Die Jakobi-Matrix $D_{(x,y)}f$ für $x \in I$, $y \in]0, 2\pi[$ ergibt sich zu
$$D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1'(x) \cdot \cos(y) & -c_1(x) \cdot \sin(y) \\ c_1'(x) \cdot \sin(y) & c_1(x) \cdot \cos(y) \\ c_2'(x) & 0 \end{pmatrix}.$$
   Wir bemerken, dass $D_{(x,y)}f$ immer vollen Rang hat, da für alle $y \in]0, 2\pi[$ gilt, dass $\det \begin{pmatrix} \cos(y) & -\sin(y) \\ \sin(y) & \cos(y) \end{pmatrix} = 1$, und für alle $x \in I$ gilt, dass $c_1'(x) \neq 0$ oder $c_2'(x) \neq 0$, und es somit keine $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gibt, sodass
$$a \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x)\cos(y) \\ c_1'(x)\sin(y) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -c_1(x)\sin(y) \\ c_1(x)\cos(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass f eine lokale Parametrisierung mit Bild S_c ist. Somit ist S_c insbesondere eine reguläre Fläche.

3. Sei $p \in S_c$ gegeben. Dann wählen wir $(x, y) \in I \times]0, 2\pi[$, sodass $p = f(x, y)$. Nach Satz IV.1.11 aus der Vorlesung ist dann $T_pS_c = \left(D_{(x,y)}f\right)(\mathbb{R})$. Mit Aufgabenteil 2 erhalten wir dann, dass
$$T_pS_c = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} c_1'(x)\cos(y) \\ c_1'(x)\sin(y) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_1(x)\sin(y) \\ c_1(x)\cos(y) \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} ac_1'(x)\cos(y) - bc_1(x)\sin(y) \\ ac_1'(x)\sin(y) + bc_1(x)\cos(y) \\ ac_2'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Sei für gegebenes $p \in S_c$ wieder $(x, y) \in I \times]0, 2\pi[$, sodass $p = f(x, y)$. Dann berechnen wir für beliebige $u, v, w, z \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} &g_p \left(\begin{pmatrix} uc_1'(x)\cos(y) - vc_1(x)\sin(y) \\ uc_1'(x)\sin(y) + vc_1(x)\cos(y) \\ uc_2'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} wc_1'(x)\cos(y) - zc_1(x)\sin(y) \\ wc_1'(x)\sin(y) + zc_1(x)\cos(y) \\ wc_2'(x) \end{pmatrix} \right) \\ &= (uc_1'(x)\cos(y) - vc_1(x)\sin(y)) \cdot (wc_1'(x)\cos(y) - zc_1(x)\sin(y)) \\ &\quad + (uc_1'(x)\sin(y) + vc_1(x)\cos(y)) \cdot (wc_1'(x)\sin(y) + zc_1(x)\cos(y)) \\ &\quad + uc_2'(x)wc_2'(x) \\ &= uw[(c_1'(x))^2 + (c_2'(x))^2] + vz(c_1(x))^2 \end{aligned}$$
   In der Basis $\left(\begin{pmatrix} c_1'(x)\cos(y) \\ c_1'(x)\sin(y) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_1(x)\sin(y) \\ c_1(x)\cos(y) \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ von T_pS_c wird g_p also durch die Matrix
$$\begin{pmatrix} (c_1'(x))^2 + (c_2'(x))^2 & 0 \\ 0 & (c_1(x))^2 \end{pmatrix}$$
   dargestellt.

5. Für gegebenes $p \in S_c$ sei wieder $(x, y) \in I \times]0, 2\pi[$, sodass $p = f(x, y)$. Wir definieren $\tilde{N}_p \in \mathbb{R}^3$ folgendermaßen:

$$\tilde{N}_p := \begin{pmatrix} c_1'(x)\cos(y) \\ c_1'(x)\sin(y) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -c_1(x)\sin(y) \\ c_1(x)\cos(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2'(x)c_1(x)\cos(y) \\ -c_2'(x)c_1(x)\sin(y) \\ c_1'(x)c_1(x) \end{pmatrix}$$

Da $\left(\begin{pmatrix} c_1'(x)\cos(y) \\ c_1'(x)\sin(y) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c_1(x)\sin(y) \\ c_1(x)\cos(y) \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von T_pS_c ist, ist dann $\tilde{N}_p \in (T_pS_c)^\perp \setminus \{0\}$. Nun definieren wir $N_p \in \mathbb{S}^2$ folgendermaßen:

$$N_p := \frac{1}{||\tilde{N}_p||}\tilde{N}_p = \frac{1}{\sqrt{(c_1'(x))^2 + (c_2'(x))^2}} \begin{pmatrix} -c_2'(x)\cos(y) \\ -c_2'(x)\sin(y) \\ c_1'(x) \end{pmatrix}.$$

Nun definieren wir $N : S_c \to \mathbb{S}^2, p \mapsto N_p$. Wir haben gezeigt, dass dann N ein Einheitsnormalenfeld ist.

Es bleibt zu zeigen, dass N eine glatte Abbildung ist. Sei dafür $p \in S_c$ und x, y mit $p = f(x, y)$ wie oben. Da $Dc_{(x)} \neq 0$ gilt, ist entweder $c_1'(x) \neq 0$ oder $c_2'(x) \neq 0$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $c_2'(x) \neq 0$. Da $c_2' : I \to \mathbb{R}$ stetig ist, gibt es dann eine offene Umgebung $U \subseteq I$ um x, sodass für alle $u \in U$ gilt, dass $c_2'(x) \neq 0$. Somit gilt für alle $(u, v) \in U \times]0, 2\pi[$, dass $N_{f(u,v)} \neq (0, 0, 1)^t$. Nun sei $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{0\}$ die lokale Parametrisierung, die das Inverse der Abbildung φ aus Aufgabe **H30** ist. Nun rechnen wir nach, dass für alle $(u, v) \in U \times]0, 2\pi[$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(N_{f(u,v)}) &= \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{(c_1'(x))^2 + (c_2'(x))^2}} \begin{pmatrix} -c_2'(x)\cos(y) \\ -c_2'(x)\sin(y) \\ c_1'(x) \end{pmatrix}\right) \\ &= -\frac{c_2'(x)}{c_1'(x) - \sqrt{(c_1'(x))^2 + (c_2'(x))^2}} \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist $\varphi \circ N \circ f : U \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ glatt und somit ist N glatt nahe p.

Im Falle, dass $c_1'(x) \neq 0$ gilt, ersetzen wir einfach φ durch die Abbildung

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{S}^2 \setminus \{(1, 0, 0)^t\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{y}{1-x}, \frac{z}{1-x}\right).$$

Danach fahren wir fort wie im ersten Fall, wobei wir überall c_2' durch c_1' ersetzen.

Insgesamt erhalten wir, dass N für jedes $p \in S_c$ glatt nahe N ist und somit, dass N eine Orientierung von S_c ist.

Aufgabe H33

1. d ist glatt, da cos und sin glatt sind. Zudem ist d injektiv, da eine inverse Funktion $d^{-1} : d(]0, 2\pi[) \to]0, 2\pi[$ gegeben ist durch $d^{-1}\left(\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{v}{r}\right)$. Es ist weiterhin klar, dass für alle $x \in]0, 2\pi[$ gilt, dass $-1 \leq \cos(x)$ und da $0 < r < R$ also $d_1(x) > 0$. Weiterhin gilt für alle $x \in]0, 2\pi[$:
$$Dd_{(x)} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin(x) \\ r \cdot \cos(x) \end{pmatrix}$$
und somit $Dd_{(x)} \neq 0$.

2. Für $p \in S_d$ mit $(x,y) \in (]0,2\pi[)^2$ sodass $p = f(x,y)$ und für $a,b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&W_p\left(\begin{pmatrix} ad_1'(x)\cos(y)-bd_1(x)\sin(y) \\ ad_1'(x)\sin(y)+bd_1(x)\cos(y) \\ ad_2'(x) \end{pmatrix}\right) \\
&= -d_pN\left(\begin{pmatrix} ad_1'(x)\cos(y)-bd_1(x)\sin(y) \\ ad_1'(x)\sin(y)+bd_1(x)\cos(y) \\ ad_2'(x) \end{pmatrix}\right) \\
&= -a \cdot d_pN\left(\begin{pmatrix} d_1'(x)\cos(y) \\ d_1'(x)\sin(y) \\ d_2'(x) \end{pmatrix}\right) - b \cdot d_pN\left(\begin{pmatrix} -d_1(x)\sin(y) \\ d_1(x)\cos(y) \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= -a \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0}\; N\left(\begin{pmatrix} d_1(x+t)\cos(y) \\ d_1(x+t)\sin(y) \\ d_2(x+t) \end{pmatrix}\right) - b \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0}\; N\left(\begin{pmatrix} d_1(x)\cos(y+t) \\ d_1(x)\sin(y+t) \\ d_2(x) \end{pmatrix}\right) \\
&= -a \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0} \begin{pmatrix} -\cos(x+t)\cos(y) \\ -\cos(x+t)\sin(y) \\ -\sin(x+t) \end{pmatrix} - b \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|_{t=0} \begin{pmatrix} -\cos(x)\cos(y+t) \\ -\cos(x)\sin(y+t) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} \\
&= a \cdot \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) \\ -\sin(x)\sin(y) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -\cos(x)\sin(y) \\ \cos(x)\cos(y) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. Für $p \in S_d$ mit $(x,y) \in (]0,2\pi[)^2$ sodass $p = f(x,y)$ und für $u,v,w,z \in \mathbb{R}$ rechnen wir:

$$\begin{aligned}
&II_p\left(\begin{pmatrix} ud_1'(x)\cos(y)-vd_1(x)\sin(y) \\ ud_1'(x)\sin(y)+vd_1(x)\cos(y) \\ ud_2'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} wd_1'(x)\cos(y)-zd_1(x)\sin(y) \\ wd_1'(x)\sin(y)+zd_1(x)\cos(y) \\ wd_2'(x) \end{pmatrix}\right) \\
&= g_p\left(W\left(\begin{pmatrix} ud_1'(x)\cos(y)-vd_1(x)\sin(y) \\ ud_1'(x)\sin(y)+vd_1(x)\cos(y) \\ ud_2'(x) \end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix} wd_1'(x)\cos(y)-zd_1(x)\sin(y) \\ wd_1'(x)\sin(y)+zd_1(x)\cos(y) \\ wd_2'(x) \end{pmatrix}\right) \\
&= g_p\left(\begin{pmatrix} -u\sin(x)\cos(y)-v\cos(x)\sin(y) \\ -u\sin(x)\sin(y)+v\cos(x)\cos(y) \\ u\cos(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} wd_1'(x)\cos(y)-zd_1(x)\sin(y) \\ wd_1'(x)\sin(y)+zd_1(x)\cos(y) \\ wd_2'(x) \end{pmatrix}\right) \\
&= u \cdot w \cdot r + v \cdot z \cdot d_1(x) \cdot \cos(x) \\
&= u \cdot w \cdot r + v \cdot z \cdot (R + r \cdot \cos(x)) \cdot \cos(x)
\end{aligned}$$

In der Basis $\left(\begin{pmatrix} d_1'(x)\cos(y) \\ d_1'(x)\sin(y) \\ d_2'(x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d_1\sin(y) \\ d_1\cos(y) \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ von T_pS_d lässt sich II_p also durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & (R + r\cdot\cos(x))\cdot\cos(x) \end{pmatrix}$$

darstellen.