Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

11. Übungsblatt – Lösungsskizze

Aufgabe P30

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$. Dann gilt

$$D_{(x,y,z)}f = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right),$$

also $D_{(x,y,z)}f = 0$ genau dann, wenn $(x, y, z) = 0$. Da $0 \notin S$ gilt, ist S nach Satz IV.1.2 eine glatte Fläche.

Aufgabe P31

1. Die Jacobimatrix von f in (x, y) ist

$$D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

   Die Abbildung $(x, y) \mapsto D_{(x,y)}f = 2 \cdot (x, y)$ ist linear und somit stetig. Somit ist f 1-fach stetig differenzierbar. Da $(x, y) \mapsto D_{(x,y)}f = 2 \cdot (x, y)$ linear ist, ist die Ableitung dieser Funktion die konstante Abbildung $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, also auch stetig. Damit ist f 2-fach stetig differenzierbar. Da alle höheren Ableitungen verschwinden sind diese insbesondere auch stetig und f ist glatt.

2. Aus Teil 1. folgt $D_2 f_{(x,y)} = 2y$, was für alle $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mit $y_0 \neq 0$ invertirbar ist.

3. Wir lösen $f(x, g(x)) = 0$ nach x auf:

$$f(x, g(x)) = 0 \Leftrightarrow x^2 + g(x)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

   Da $y_0 < 0$ setzen wir

$$g\colon\ ]-1, 1[\to \mathbb{R}, \quad y \mapsto -\sqrt{1 - y^2},$$

   eine (nach der Kettenregel) stetig differenzierbare Funktion. Ferner gilt

$$f(x, g(x)) = x^2 + (-\sqrt{1 - x^2})^2 - 1 = 0$$

   (nach Konstruktion) und $g(y_0) = -\sqrt{1 - y_0^2} = -\sqrt{x_0^2} = x_0$ (hier verwenden wir $(x_0, y_0) \in X \Leftrightarrow x_0^2 = 1 - y_0^2$, woraus insbesondere $y_0 \in\ ]-1, 1[$ folgt).

Aufgabe P32

Sei $f\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus und sei X kompakt. Ist $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von Y, so ist $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ eine offenen Überdeckung von X (warum?). Da X kompakt ist existiert eine endliche Teilmenge $\{i_1, ..., i_n\} \subseteq I$, so dass $f^{-1}(U_{i_1}), ..., f^{-1}(U_{i_n})$ eine offene Überdeckung von

X ist. Da f^{-1} stetig ist und $U_i = f(f^{-1}(U_i)) = (f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U_i))$ gilt ist also auch $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ eine offene Überdeckung von Y. Damit hat die beliebige offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ die endliche Teilüberdeckung $U_{i_1}, ..., U_{i_n}$ und somit ist Y kompakt. Analog zeigt man, dass wenn Y kompakt ist, dann auch X.

Aufgabe H28

Wir müssen zeigen, dass um jeden Punkt $p \in S$ eine lokale Parametrisierung existiert. Dazu setzen wir

$$F\colon U \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, 0).$$

Nach Definition nimmt F nur Werte in S an und es gilt $S \cap \mathbb{R}^3 = F(U)$. Also können wir $O = \mathbb{R}^3$ in der Definition der lokalen Parametrisierung nehmen. Da $F\colon U \to S \cap \mathbb{R}^3$ die stetige Umkehrfunktion $(x, y, 0) \mapsto (x, y)$ hat ist F insbesondere ein Homöomorphismmus von U auf $S \cap \mathbb{R}^3$. Ferner gilt

$$D_{(u_1,u_2)}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

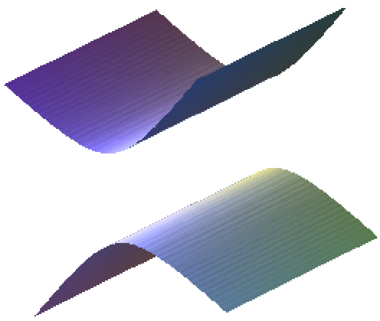
für alle $(u_1, u_2) \in U$, also ist F eine lokale Parametrisierung. Da jeder Punkt in S im Bild von F liegt existiert also um jeden Punkt eine lokale Parametrisierung und S ist damit eine reguläre Fläche.

Aufgabe H29

1. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto xy - 1$. Dann gilt

   $$D_{(x,y,z)}f = \begin{pmatrix} y & x & 0 \end{pmatrix},$$

   welches genau dann verschwindet, wenn $(x, y) = 0$ gilt. Da $(0, 0, z) \notin B$ gilt, ist somit B nach Satz IV.1.2 eine reguläre Fläche:

2. (a) Die Funktion

   $$V \to B, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{xy}} \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{xy}} & z \\ 0 & \frac{y}{\sqrt{xy}} \end{pmatrix} \tag{1}$$

   nimmt Werte in B an, da

   $$\frac{x}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{y}{\sqrt{xy}} = \frac{xy}{\sqrt{xy}^2} = 1$$

   gilt. Ferner hat (1) hat glatte Komponentenfunktionen, da die Funktionen $\mathbb{R}^3 \to (x, y, z) \mapsto x$, $(x, y, z) \mapsto y$ und $(x, y, z) \mapsto xy$ glatt sind, ebenso wie die Funktionen $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$. Also ist die Funktion (1) glatt.

(b) Da die inverse Matrix zu einer Matrix mit Determinante 1 wieder Determinante 1 hat ist die Abbildung

$$V \to B, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} & z \\ 0 & \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}^{-1} \tag{2}$$

wohldefiniert. Ferner gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} & z \\ 0 & \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} & -z \\ 0 & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

und mit dem gleichen Argument wie zuvor ist die Abbildung (2) glatt.

3. Es gilt für die Abbildung (2), dass sie auf B eingeschränkt mit der Abbildung

$$B \to B, \quad \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix}^{-1} \tag{3}$$

übereinstimmt. Da V offen in $\mathbb{R}^3$ ist und $B \subseteq V$ gilt ist somit (3) glatt nach Definition IV.1.7.

Aufgabe H30

1. Die Umkehrfunktion von φ ist

$$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}, \quad (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right).$$

Diese ist offenbar stetig, also ist φ ein Homöomorphismus.

2. Wir zeigen, dass die oben angegeben Funktion F ist eine lokale Parametrisierung ist. Es gilt

$$D_{(u,v)}F = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2} \begin{pmatrix} 2v^2 - 2u^2 + 2 & -4uv \\ -4uv & 2u^2 - 2v^2 + 2 \\ 2u(u^2+v^2) & 2v(u^2+v^2) \end{pmatrix}.$$

Die beiden Spalten der Matrix sind für beliebige (u, v) linear unabhängig. Dies sieht man wie folgt: für $(u, v) = 0$ sieht man dies direkt, sei also $(u, v) \neq 0$. Wären die Spalten linear abhängig, so gäbe es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda 2u(u^2+v^2) = 2v(u^2+v^2) \quad \text{und}$$
$$\lambda(-4uv) = 2u^2 - 2v^2 + 2.$$

Aus der ersten Zeile und $(u, v) \neq 0$ ergibt sich $u, v, \lambda \neq 0$ und $\lambda = \frac{v}{u}$. Damit ergibt sich aus der zweiten Zeile $u^2 + v^2 + 1 = 0$, ein Widerspruch.

Man kann die Parametrisierung auch mit -1 anstelle von 1 bauen, also das Inverse der Funktion

$$\varphi'\colon \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right)$$

als lokale Parametrisierung nehmen. Da sich hierbei nur das Vorzeichen der z-Komponente ändert ist die Parametrisierung dann gegeben durch

$$F'\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}, \quad (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{1-u^2+v^2}{u^2+v^2+1} \right).$$

Das Argument dafür, dass F' eine lokale Parametrisierung ist verläuft dann ganz analog zu dem fon F. Da $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ und $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ ganz $\mathbb{S}^2$ überdecken ist damit alles gezeigt.