Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

1. Übungsblatt – Lösungsskizze

Aufgabe P1

1. Man rechnet direkt nach, dass $+$ und $\cdot$ assoziativ, kommutative und assoziativ sind und dass $0 + \varepsilon 0$ das neutrale Element der Addition und $1 + \varepsilon 0$ das neutrale Element der Multiplikation ist. Ebenfalls klar ist, dass $-(a + \varepsilon b) = -a + \varepsilon(-b)$ das additive Inverse ist. Einzig das multiplikative Inverse ist etwas trickreicher:
$$\frac{1}{a+\varepsilon b} = \frac{a-\varepsilon b}{(a+\varepsilon b)(a-\varepsilon b)} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \varepsilon\frac{b}{a^2-2b^2},$$
da $a^2 - 2b^2$ nie Null werden kann (warum genau)?

2. Wiederum ist alles klar bis auf die Abgeschlossenheit unter dem Bilden multiplikativer Inverser. Dazu können wir uns der obigen Formel bedienen (oder obigen Trick anwenden, oder einfach raten):
$$(a + \sqrt{2}b)^{-1} = \frac{a}{a^2-2b^2} - \sqrt{2}\frac{b}{a^2-2b^2}$$
(die explizite Verifikation, dass dies auch stimmt ist eine gute Übung). Damit ist
$$(1 + \sqrt{2})^{-1} = -1 + \sqrt{2}.$$

3. Die Abbildung $(a + \varepsilon b) \mapsto (a + \sqrt{b})$ ist offensichtlich bijektiv. Man rechnet leicht nach, dass die Abbildung Kompatibel mit der Addition und der Multiplikation ist.

Aufgabe P2

Bezüglich der repräsentantenweise Addition und Multiplikation (also $[n] + [m] := [n + m]$ und $[n] \cdot [m] := [n \cdot m]$) sind $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ offenbar Ringe (wem das nicht klar ist, der überlege sich diesen Sachverhalt bitte nochmals). Daher müssen wir nur schauen, ob alle Elemente $\neq 0$ multiplikative Inverse haben. In $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nich viel zu zeigen, da jedes von Null verschiedene Element (also nur $[1]$) offensichtlich multiplikativ invertierbar ist. In $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ gilt $[2] \cdot [2] = [1]$, also ist auch $[2]$ multiplikativ invertierbar. In $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ hat $[2]$ *kein* multiplikativesm Inverses und in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat nur $([1], [1])$ ein multiplikatives Inverses (um dies zu sehen kann man z.B. alle Fälle explizit durchrechnen). Also sind beides keine Körper.

Einen Körper mit 4 Elementen gibt es (und dieser ist sogar eindeutig bis aus Isomorphie). Die unterliegende additive Gruppe muss entweder $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sein, da es (bis auf Isomorphie) nur diese beiden Gruppen mit 4 Elementen gibt. Wir werden später sehen, dass die additive Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist. Mit diesem Wissen kann man explizit eine Multiplikationstafel aufstellen (die Nullen auf der Diagonalen von $+$ sind dabei das einzige, was man über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wissen muss):

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0		
a	a		0	
b	b			0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a		
b	0	b		

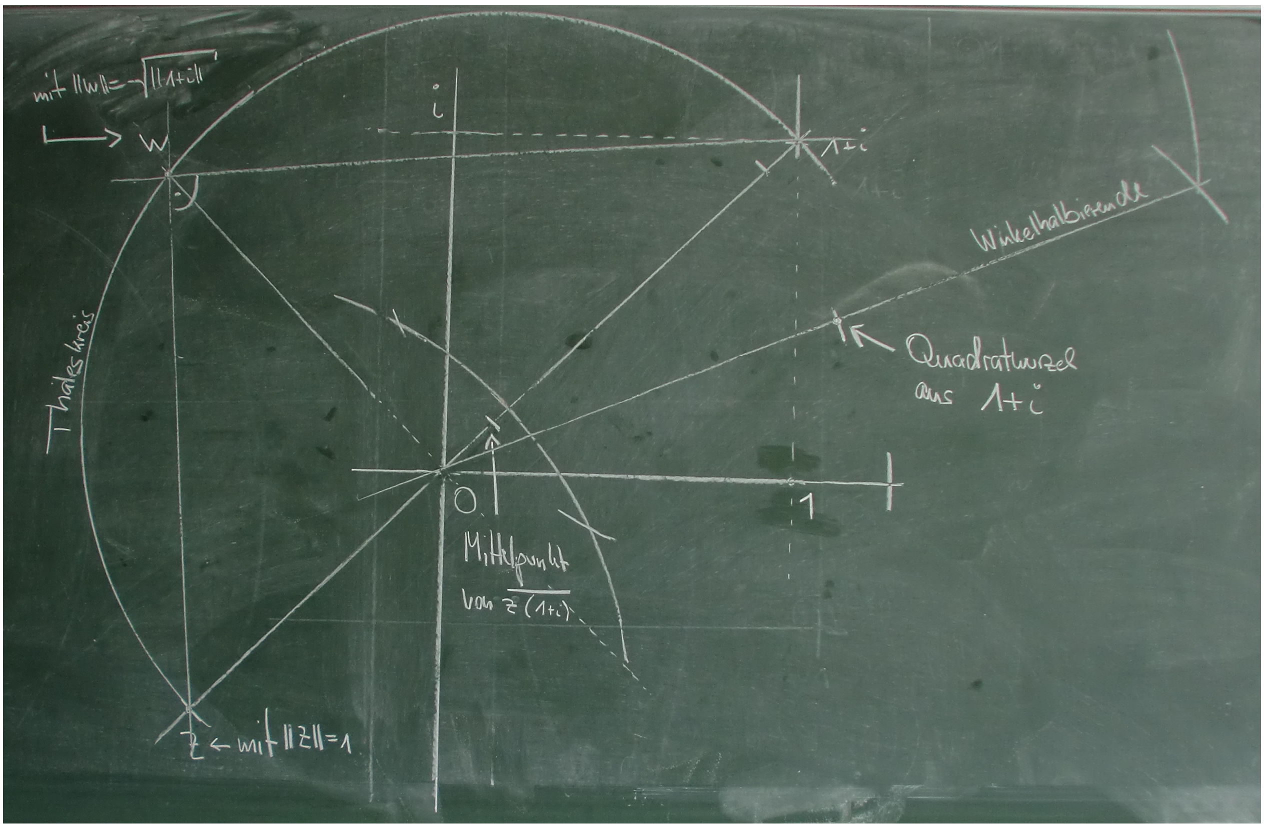
Die restlichen Einträge ergeben sich daraus, dass in jeder Zeile und Spalte jeder Eintrag genau einmal vorkommen muss (bei $\cdot$ sind dabei natürlich die 1. Spalte und Zeile ausgenommen.

Aufgabe P3

1. Beides sind keine Teikörper, da 0 und 1 in jedem Teilkörper enthalten sein müssen.
2. $\mathbb{Q}$: ja, $1 \notin \sqrt{2} \cdot \mathbb{Q}$: nein, $\mathbb{Q} \cap \sqrt{2} \cdot \mathbb{Q} = \{0\}$: nein, $\mathbb{Q} + \sqrt{2} \cdot \mathbb{Q}$: ja (rechnet man direkt nach), $\mathbb{Q} \cup \sqrt{2} \cdot \mathbb{Q}$: nein (da $1 + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ und $1 + \sqrt{2} \notin \sqrt{2} \cdot \mathbb{Q}$)
3. Da $\sqrt{2} \cdot \mathbb{R} = \mathbb{R}$ ist die Antwort immer ja.

Aufgabe P4

Nach dem Satz von Thales ist das Dreieck rechtwinklig und nach dem Höhensatz gilt $\|z\|^2 = \|-1\| \cdot r$, also $\|z\| = \sqrt{r}$. Trägt man die Strecke $\overline{0z}$ auf der reellen Achse ab, so erhält man die positive Quadratwurzel. Eine Quadratwurzel von $1 + i$ kann man wie in dem folgenden Bild konstruierten:



Dei einzelnen Konstruktionsschritte dabei sind:

- Konstruktion von $1 + i$.
- Konstruktion eines Punktes z auf der Geraden durch 0 und $1 + i$ mit $\|z\| = 1$.
- Konstruktion der Mitte von der Strecke $\overline{z(1+i)}$ und des Thaleskreises um diese Mitte.
- Konstruktion von w auf dem Thaleskreis, so dass $\overline{w0}$ senkrecht auf $\overline{z(1+i)}$ steht.
- Konstruktion der Winkelhalbierenden der Geraden durch 0 und 1, sowie druch 0 und $1 + i$
- Abtragen der Strecke $\|w\|$ auf dieser Winkelhalbierenden liefert dann eine Quadratwurzel von $1 + i$.

Aufgabe H1

Das geht wörtlich wie in P1, nur dass

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

gilt. Der dieser Körper kann nicht isomorph zu dem aus P1 Teil 1. sein, da in es in diesem Körper ein Element gibt, das zu -1 quadriert, nicht aber in dem Körper P1 Teil 1. (da dieser wiederum zu dem aus P1 Teil 2. isomorph ist, und hier sieht man dies direkt).

Aufgabe H2

Die Lösung zu dieser Aufgabe wird in der Übung vorgerechnet.

Aufgabe H3

Wählt man auf den beiden Schenkeln des 2. Winkels jeweils einen Punkt, so erhält man ein Dreieck. Zu diesem Dreieck kann man ein kongruentes Dreieck so konstruieren, dass eine Seite des neuen Dreiecks auf einem Schenkel des 1. Winkels liegt und die Ecke, die der Spitze des 2. Winkels entspricht auf der Spitze des 1. Winkels liegt. Der sich daraus ergebende Gesamtwinkel ist die Summe der beiden Ausgangswinkel.