Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

13. Übungsblatt

In dieser Übung sollen die Hausübungen von Blatt 12 besprochen werden. Leute, die noch vorrechnen müssen sollen das bitte zum Anfang der Stunde machen.

Hausübungen

Aufgabe H34 (4P)
Wir betrachten den Torus als Nullstellenmenge der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto (x^2+y^2-2)^2+4z^2-1.$$

1. Zeigen Sie, dass $S_f := f^{-1}(0) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (x^2+y^2-2)^2+4z^2=1 \right\}$ eine Reguläre Fläche ist.

2. Lösen Sie die Gleichung
$$(x^2+y^2-2)^2+4z^2=1$$
nach z auf, um hieraus *eine* Parametrisieung für S_f zu erhalten. Diese muss nicht unbedingt ganz S_f überdecken (eine solche gibt es gar nicht). Geben Sie dabei den Bereich für die $(x,y)^t$ als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ so an, für die diese Auflösung immer Möglich ist.

3. Geben Sie eine lokale Parametrisierung $F\colon U \subseteq_{\circ} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ von S_f an, so dass $(1,1,\frac{1}{2})^t$ in $F(U)$ enthalten ist.

4. Geben Sie eine lokale Parametrisierung von S_f $F\colon U \subseteq_{\circ} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ an, so dass $(1,1,-\frac{1}{2})^t$ in $F(U)$ enthalten ist.

Aufgabe H35 (8P)
Wir betrachten den sogenannten Affensattel, also die reguläre Fläche

$$S_{\text{Aff}} := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z = x^3 - 3xy^2 \right\}$$

Die Benennung und die nebenstehenden Abbildungen sollten selbsterklärend sein.

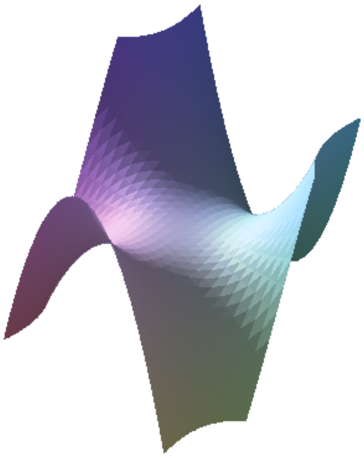

Abbildung 1: Affensattel

1. Geben Sie eine lokale Parametrisierung $F\colon \mathbb{R}^2 \to S_{\text{Aff}}$ an, für die $F(\mathbb{R}^2) = S_{\text{Aff}}$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass S_{Aff} diffeomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.
3. Geben Sie eine Basis von $T_{F(x,y)^t} S_{\text{Aff}}$ in Abhängigkeit von $(x, y)^t$ an.
4. Geben Sie ein glattes Nomalenfeld auf S_{Aff} an.
5. Geben Sie ein glattes Einheitsnomalenfeld auf S_{Aff} an.

Abbildung 2: Affe auf Affensattel

6. Zeigen Sie, dass $(1, 0, 0)^t$ und $(0, 1, 0)^t$ im Punkt 0 Hauptkrümmungsrichtungen sind.
7. Berechnen Sie die Gauß-Krümmung im Punkt 0.
8. Geben Sie drei Geraden (als Punktmengen) im $\mathbb{R}^3$ an, die in S_{Aff} liegen und durch p gehen.

Hinweis: Beachten Sie, dass die anschauliche Interpretation der von Punkten mit positiver, negativer und verschwindender Krümmung jeweils *nur bis auf Terme dritter Ordnung* gegeben war und die Funktionsvorschrift des Affensattel gerade aus Termen dritter Ordnung besteht. Es ist also der Affensattel ein Beispiel, welches der Intuition hier widerspricht.