Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SS 2012

12. Übungsblatt

Präsenzübungen

Aufgabe P33

Es seien S_1, S_2 Flächen und $f : U \Subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ glatt mit $S_1 \subseteq U$ und $f(U) \subseteq S_2$. Zeigen Sie, dass dann die Einschränkung $f|_{S_1} : S_1 \to S_2$ eine glatte Abbildung ist. Folgern Sie daraus, dass wenn A eine orthogonale Matrix ist, dass dann

$$f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2,\, x \mapsto Ax$$

wohldefiniert und eine glatte Abbildung ist.

Aufgabe P34

Sei $U \Subset \mathbb{R}^3$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann betrachten wir den Graphen von φ als Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit Parametrisierung

$$f : U \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi(x,y) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die erste Fundamentalform $g_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ an jedem Punkt $p \in S$.

Aufgabe P35

Aus Aufgabe **P33** wissen wir, dass $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$, $x \mapsto Ax$ eine glatte Abbildung ist. Berechnen Sie für jedes $p \in \mathbb{S}^2$ das Differential T_pf. Was ist das Bild von T_pf?

Hausübungen

Aufgabe H31 (4P)

Sei $U \Subset \mathbb{R}^2$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Sei ferner $S_1 := \{(x, y, \varphi(x, y))^t \mid (x, y) \in U\}$ und $S_2 := U \times \{0\}$.

1. Zeigen Sie, dass $f : S_1 \to S_2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Diffeomorphismus ist.
2. Sei $p \in S_1$. Berechnen Sie das Differential T_pf.

Hinweis: Diese Aufgabe soll besonders das formal korrekte Aufschreiben üben. Dementsprechend können Sie nur die vollen Punkte für diese Aufgabe erhalten, wenn Ihre Lösung auch formal korrekt ist.

Bitte wenden!

Aufgabe H32 (5P)

In dieser Aufgabe sei $I \subseteqq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $c : I \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix}$ eine injektive glatte Abbildung, sodass $Dc_{(x)} \neq 0$ und $c_1(x) > 0$ für alle $x \in]0, 2\pi[$. Dann definieren wir die *zu c gehörige Rotationsfläche* S_c als das Bild der Abbildung

$$f : I \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} c_1(x)\cdot\cos(y) \\ c_1(x)\cdot\sin(y) \\ c_2(x) \end{pmatrix}.$$

1. Zeigen Sie, dass f ein Homöomorphismus von $I\times]0, 2\pi[$ auf S_c ist, indem Sie eine Umkehrfunktion angeben und zeigen, dass diese stetig ist.

   Hinweis: Aus dem Satz über die Umkehrfunktion folgt, dass $c^{-1} : c(I) \to I$ glatt ist.

2. Zeigen Sie, dass f glatt ist und dass $D_{(x,y)}f$ für alle $(x, y) \in I \times]0, 2\pi[$ einen Rang von 2 hat. Schließen Sie hieraus und aus Aufgabenteil 1, dass S_c eine reguläre Fläche ist.

3. Berechnen Sie die Tangentialräume T_pS_c für alle $p \in S_c$.

4. Berechnen Sie für jeden Punkt $p \in S_c$ die erste Fundamentalform $g_p : T_pS_c \times T_pS_c \to \mathbb{R}$ von S_c.

5. Geben Sie eine Orientierung $N : S_c \to \mathbb{S}^2$ von S_c an und prüfen Sie, dass N tatsächlich ein glattes Einheitsnormalenfeld ist.

   Hinweis: Erinnern Sie sich an das Vektorprodukt auf $\mathbb{R}^3$, das zu je zwei linear unabhängigen Vektoren einen zu diesen Vektoren orthogonalen Vektor liefert. Um Glattheit zu zeigen, überlegen Sie sich eine möglichst einfache Parametrisierung von $N(S_c) \subseteq \mathbb{S}^2$.

Hinweis: Sie dürfen (und sollen) in dieser und der folgenden Aufgabe die Resultate aus Analysis I und II verwenden, die die Stetigkeit und Glattheit bekannter Funktionen (also von Polynomfunktionen, Potenzreihen, Wurzelfunktionen, etc.) betreffen.

Aufgabe H33 (3P)

Seien $R, r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$ gegeben. Es sei ferner $d :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} R+r\cdot\cos(x) \\ r\cdot\sin(x) \end{pmatrix}$.

1. Zeigen Sie, dass d eine injektive glatte Abbildung ist, sodass $Dd_{(x)} \neq 0$ und $d_1(x) > 0$ für alle $x \in]0, 2\pi[$ gilt.

Im Folgenden sei N die Orientierung auf der zu d gehörigen Rotationsfläche S_d, die sie in **H32**, Aufgabenteil 3 berechnet haben. Wenn Sie diese Aufgabe nicht gelöst haben, können sie ohne weiteren Beweis die Orientierung

$$N : S_d \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} (R+r\cdot\cos(x))\cdot\cos(y) \\ (R+r\cdot\cos(x))\cdot\sin(y) \\ r\cdot\sin(x) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\cos(x)\cdot\cos(y) \\ -\cos(x)\cdot\sin(y) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}$$

benutzen.

2. Berechnen Sie für jeden Punkt $p \in S_d$ die Weingarten-Abbildung $W_p : T_pS_d \to T_pS_d$ bezüglich des Normalenfeldes N.

3. Berechnen Sie für jeden Punkt $p \in S_d$ die zweite Fundamentalform

   $$II_p : T_pS_d \times T_pS_d \to \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto g_p(W_p(X), Y).$$

   an diesem Punkt.