Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

11. Übungsblatt

Aufgabe P30

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}$. Zeigen Sie, dass das Ellipsoid

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

eine reguläre Fläche ist.

Aufgabe P31

Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. Sei

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

1. Berechnen Sie die Jacobimatrix von f und zeigen Sie, dass f glatt ist.
2. Auf welche $(x_0, y_0) \in X$ lässt sich der Satz über implizite Funktionen anwenden (also wann ist $D_2 f_{(x_0,y_0)}$ invertierbar)?
3. Es sei $(x_0, y_0) \in X$ mit $y_0 < 0$. Bestimmen Sie eine offene Umgebung W von x_0 und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon W \to \mathbb{R}$ so dass $f(x, g(x)) = 0$ und $g(x_0) = y_0$ gilt.

Aufgabe P32

Zeigen Sie: sind zwei metrische Räume homöomorph, so ist ein Raum genau dann kompakt wenn es der andere auch ist. Folgern Sie daraus, dass $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{S}^n$ nicht homöomorph sein können.

Hausübungen

Aufgabe H28 (4P)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge. Zeigen Sie, dass dann

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in U, z = 0\}$$

eine reguläre Fläche ist.

Beachten Sie: Diese Aufgabe soll besonders das formal korrekte Aufschreiben üben. Dementsprechend können Sie nur die vollen Punkte für diese Aufgabe erhalten, wenn Ihre Lösung auch formal korrekt ist.

Bitte wenden!

Aufgabe H29 (4P)
Wir identifizieren $\mathbb{R}^3$ mit dem Raum der strikten oberen 2×2-Matrizen

$$\mathbb{R}^3 \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

1. Zeigen Sie, dass der Raum der strikten oberen 2×2-Matrizen mit Determinante 1

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : xy = 1 \right\}$$

eine reguläre Fläche ist.

2. Wir betrachten die offene Teilmenge

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy > 0\} \Subset \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass die beiden Abbildung wohldefiniert und glatt sind:

(a)

$$V \to B, \quad (x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{xy}} \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

(b)

$$V \to B, \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} & z \\ 0 & \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \end{pmatrix}^{-1}$$

3. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$B \to B, \quad \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & z \\ 0 & y \end{pmatrix}^{-1}$$

eine glatte Abbildung ist.

Hinweis: Sie dürfen (und sollen) in dieser Aufgabe die Resultate aus der Analysis I und Analysis II verwenden, die die Glattheit bekannter Funktionen betreffen (also die Glattheit von Polynomfunktionen, Potenzreihen, Wurzelnfunktionen, ... betreffend). Den 3. Aufgabenteil können Sie erst nach der Vorlesung am 24.6. bearbeiten.

Aufgabe H30 (4P)
Es sei $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ die 2-Sphäre.

1. Zeigen Sie, dass

$$\varphi\colon \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right)$$

ein Homöomorphismus ist, indem Sie eine Umkehrfunktion angeben und zeigen, dass diese stetig ist.

Hinweis: wenn Sie eine Gerade durch $(0,0,1)$ und einen beliebigen Punkt (x, y, z) auf $\mathbb{S}^2$ ziehen, dann schneidet diese Gerade die xy-Ebene in genau im Punkt $\varphi(x, y, z)$. Darüber können Sie die Umkehrfunktion von φ bestimmen. Machen Sie sich eine Skizze (zum Beispiel in der xz-Ebene)!

2. Geben Sie auf $\mathbb{S}^2$ zwei lokale Parametriesierungen $F_{1,2}\colon U_{1,2} \to \mathbb{R}^3$ an, so dass $F_1(U_1)$ und $F_2(U_2)$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{S}^2$ bilden.