Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

8. Übungsblatt

Aufgabe P23

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$m : S_3 \times S_3 \to S_3, (\pi, \pi') \mapsto \pi \circ \pi'$$

kein Gruppenhomomorphismus ist.

Zusatz für Ambitionierte: Zeigen Sie, dass für jede nicht-abelsche Gruppe $(G, \cdot)$ gilt, dass $m : G \times G \to G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ kein Homomorphismus ist.

Aufgabe P24

Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X operiert. Zeigen Sie:

1. G_x ist eine normale Untergruppe von G genau dann, wenn für alle $y \in G \cdot x$ gilt, dass $G_x = G_y$.
2. Die Operation von G auf X ist genau dann treu, wenn $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$ gilt.

Aufgabe P25

Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

1. Für zwei Untergruppen $A, B \leq G$ ist $A \cup B$ nur dann eine Untergruppe, wenn $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$. Somit kann G keine Vereinigung zweier echter Untergruppen sein.
2. Für Untergruppen $H_1, \ldots, H_k \leq G$ von endlichem Index ist $\bigcap_{i=0}^{k} H_i$ eine Untergruppe von G von endlichem Index.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass für $j \leq k$ gilt, dass $\left[G : \bigcap_{i=0}^{j} H_i\right] \leq \prod_{i=0}^{j} [G : H_i]$.

Bitte wenden!

Hausübungen

Aufgabe H20 (3P)

1. Sei G eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert. Sein $\{x_i \mid i \in I\}$ ein Repräsentantensystem der Bahnen, also $X = \cup_{i\in I} G.x_i$ und für jedes $i \in I$ gilt
$$|\{x_i \mid i \in I\} \cap G.x_i| = 1.$$
Zeigen Sie, dass dann
$$|X| = \sum_{i\in I} [G : G_{x_i}] = |X^G| + \sum_{i\in I, x_i \notin X^G} [G : G_{x_i}]$$
gilt.
2. Eine Gruppe der Ordnung 35 operiert auf einer Menge mit 19 Elementen ohne Fixpunkte. Wie viele Bahnen hat die Wirkung?
3. Kann eine Gruppe der Ordnung 25 auf einer Menge mit 19 Elementen ohne Fixpunkte operieren?

Hinweis: Sie dürfen auch hier wieder vorige Aufgabenteile verwenden, auch wenn Sie diese nicht gezeigt haben.

Aufgabe H21 (5P)
Sei p eine Primzahl und $\pi, \pi' \in S_p$ so, dass π ein Zyklus der Länge p ist und π' eine Transposition. Es sei $H = \langle \pi, \pi' \rangle$ die von π und π' erzeugte Untergruppe.

1. Zeigen Sie, dass es eine Aufzählung $\{m_i \mid i \in \{1, \ldots, p\}\}$ der Menge $\{1, \ldots, p\}$ gibt, sodass $\pi = (m_1\ m_2\ \ldots\ m_p)$ und $\pi' = (m_1\ m_i)$ für ein $i \in \{1, \ldots, p\}$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass $(m_1\ m_2) \in H$.
3. Zeigen Sie, dass $(m_i\ m_j) \in H$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ mit $i < j$ gilt.
4. Zeigen Sie, dass $H = S_p$ gilt.

Beachten Sie: Diese Aufgabe soll besonders das formal korrekte Aufschreiben üben. Dementsprechend können Sie nur die vollen Punkte für diese Aufgabe erhalten, wenn Ihre Lösung auch formal korrekt ist. Sie dürfen auch hier wieder vorige Aufgabenteile verwenden, auch wenn Sie diese nicht gezeigt haben.

Aufgabe H22 (4P)
Es sei $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid z \cdot \overline{z} = 1\}$ der Einheitskreis. Zeigen Sie:

1. $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ ist eine Gruppe, die $E_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ als Untergruppe enthält.
2. $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ist eine Gruppe und $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist als Gruppe isomorph zu $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{S}^1$.
3. Es gibt einen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$.
4. Bestimmen Sie die Elemente endlicher Ordnung in $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{S}^1$. Bilden sie eine Gruppe?