Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

5. Übungsblatt

Aufgabe P14
Zeigen Sie, dass das Polynom

$$\Psi_\alpha(X) = X^{\alpha-1} + X^{\alpha-2} + ... + X + 1$$

für $\alpha \in 2 \cdot \mathbb{N}_{>0}$ nicht irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe P15
Seien $k \subseteq E$ ein Teilkörper und $a \in E$ algebraisch. Zeigen Sie: ist $b \in E$ eine (weitere) Nullstelle des Minimalpolynoms $m_{a,k}$ von a über k, dann gibt es einen Körperisomorphismus $\varphi\colon k(a) \to k(b)$, so dass $\varphi(a) = b$ und $\varphi(x) = x$ für alle $x \in k$ gilt.
Wenden wir dies auf $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ und $\sqrt{2}$ an, so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(-\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

Ist dieser Isomorphismus stetig (bzgl. der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik auf $\mathbb{Q}$)?

Aufgabe P16
Konstruieren Sie einen Körper mit 9 Elementen und einen mit 27 Elementen.

Hausübungen

Aufgabe H12 (3P)
Zerlegen Sie die Polynome

$$\Psi_4(X) = X^3 + X^2 + X + 1$$
$$\Psi_6(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

in $\mathbb{Q}[X]$ in irreduzible Faktoren, schreiben Sie diese also als $s_1 \cdot ... \cdot s_k$ für ein $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $s_i \in \mathbb{Q}[X]$, so dass alle s_i normiert und irreduzibel sind. Wie lautet dann das Kreisteilungspolynom Φ_4 (bzw. Φ_6), also das Polynom, welches irreduzibel ist und $e^{\frac{2\pi i}{4}}$ (bzw. $e^{\frac{2\pi i}{6}}$) als Nullstelle hat?

Hinweis: Falls Sie eine Zerlegung durch einen Koeffizientenvergleich suchen können Sie dabei immer annehmen, dass die Leitkoeffizienten der Polynome in der Zerlegung gleich 1 sind (warum?).

Bitte wenden!

Aufgabe H13 (5P)

In dieser Aufgabe werden wir ein Element $z \in \mathbb{C}$ konstruieren, für das $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}]$ eine Potenz von 2 ist, welches sich jedoch *nicht* mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt!
Sei dazu p das Polynom mit $p(X) = X^4 + X + 1$. Zeigen Sie:

1. p ist irreduzibel in $\mathbb{Z}_2[X]$ und in $\mathbb{Q}[X]$.
2. In $\mathbb{C}[X]$ gilt
$$p(X) = (X - z)(X - \overline{z})(X - w)(X - \overline{w})$$
und die Nullstellen $z, \overline{z}, w, \overline{w}$ erfüllen die Bedingungen
   (a) $z + \overline{z} + w + \overline{w} = 0$
   (b) $z\overline{z} + w\overline{w} + (z + \overline{z})(w + \overline{w}) = 0$
   (c) $z\overline{z}(w + \overline{w}) + w\overline{w}(z + \overline{z}) = -1$
   (d) $z\overline{z}w\overline{w} = 1$.
3. $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = 4$.
4. Für $\alpha := z\overline{z} + w\overline{w}$ gilt $\alpha = (z + \overline{z})^2$.
5. z ist kein Element von $\triangle\mathbb{Q}$. Sie können dabei ohne Beweis verwenden, dass α eine Nullstelle des Polynoms $q \in \mathbb{Q}[X]$ mit $q(X) = X^3 - 4X - 1$ ist.

Hinweis: Koeffizientenvergleich! Versuchen Sie *nicht*, die Nullstellen von p oder q explizit zu bestimmen. Sie können außerdem jeweils die Ergebnisse des vorigen Teils verwenden, auch wenn Sie diesen nicht gezeigt haben sollten.