# Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

## 4. Übungsblatt

---

**Aufgabe P11**

1. Ist das Polynom $X^2 + X + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Z}_2$?
2. Ist das Polynom $X^3 + X + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Z}_2$?
3. Ist das Polynom $X^3 + X^2 + X + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Z}_2$?
4. Ist das Polynom $X^3 + X + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Z}_3$?

**Hinweis:** Für (1), (2) und (3) finden Sie ein allgemeines Verfahren, um alle irreduziblen Polynome über $\mathbb{Z}_2$ bis Grad 3 aufzulisten.

**Aufgabe P12** Sei $k \subseteq E$ ein Teilkörper und sei $a \in E$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi : k[X]/m_{a,k} \cdot k[X] \to k(a), \qquad \overline{X} \mapsto a$$

ein Isomorphismus von Körpern definiert (wobei $\overline{X}$ die Restklasse des Polynoms $X$ ist).

**Aufgabe P13**

1. Zeigen Sie, dass $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[7]{5})$.
2. Zeigen Sie, dass es keinen Körper $E \supseteq \mathbb{R}$ geben kann, sodass $[E : \mathbb{R}] = 3$.

**Hinweis:** Überlegen Sie sich, welche Zwischenkörper jeweils nur existieren können.

**Bitte wenden!**

## Hausübungen

**Aufgabe H9** (4P) Bestimmen sie für die folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$, ob sie irreduzibel über $\mathbb{Q}$ sind. Benutzen Sie ggf. eine geeignete Variablensubstitution und begründen Sie Ihre Entscheidung!

1. $\frac{7}{8}X^4 + \frac{1}{2}X^3 + 5X^2 + 6X + 12$,
2. $8X^3 - 6X + 1$,
3. $27X^3 + 18X^2 + 21X + 25$,
4. $3X^4 + 6X^2 - 12X + 10$,
5. $X^4 + 2X^2 + 1$
6. $3X^3 + 21X^2 - 2X - 14$,

**Aufgabe H10** (4P)

1. Es sei $a := 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$. Zeigen Sie dann, dass $m_{a,\mathbb{Q}} = X^3 + X^2 - 2X - 1$. Sie können dabei ohne Beweis verwenden, dass $\sum_{n=0}^{6} \cos(n \cdot \frac{2\pi}{7}) = 0$ gilt.
2. Folgern Sie aus (1), dass man nur mit Zirkel und Lineal kein in den Einheitskreis einbeschriebenes 7-Eck konstruieren kann.

**Hinweis:** Für (1) erinnern Sie sich daran, welche Identitäten für Potenzen trigonometrischer Funktionen gelten.

**Aufgabe H11** (4P)
Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom $m_{a,\mathbb{Q}}$ für folgende $a \in \mathbb{C}$:

1. $a = \sqrt{7}$,
2. $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$,
3. $a = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$
4. $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Zeigen Sie, dass die von Ihnen bestimmten Polynome auch tatsächlich Minimalpolynome sind.

**Hinweis:** Für (4) schreiben Sie $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ in der Form $\sqrt{\alpha}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann wenden Sie die $pq$-Formel rückwärts an.