Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

3. Übungsblatt

Aufgabe P8
Sei k ein Körper.

1. Zeigen Sie, dass in $k[X]$ die folgende Aussage gilt:
$$p \mid q \Leftrightarrow q \cdot k[X] \subseteq p \cdot k[X].$$

2. Seien $p, q \in k[X]$ Polynome. Zeigen Sie, dass die Menge
$$I(p, q) := p \cdot k[X] + q \cdot k[X]$$
ein Untervektorraum von $k[X]$ ist und dass
$$s \in k[X], t \in I(p, q) \Rightarrow s \cdot t \in I(p, q)$$
gilt.

Aufgabe P9
Überlegen Sie sich, dass ein Polynom, welches eine Nullstelle hat, nicht irreduzibel sein kann. Zeigen Sie dann, dass ein Polynom in $\mathbb{R}[X]$ vom Grad $3, 5, 7, 9, ...$ nicht irreduzibel sein kann. Geben Sie ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ an, welches in $\mathbb{R}[X]$ nicht mehr irreduzibel ist. Bestimmen Sie zum Schluss alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[X]$.

Aufgabe P10
Zeigen Sie
$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ ist ein Körper } \Leftrightarrow n \text{ ist Primzahl.}$$
Sie dürfen dabei ohne Beweis die Identität
$$\mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b \cdot \mathbb{Z}$$
verwenden (siehe auch Aufgabe **H8**).

Hausübungen

Aufgabe H7 (2P)
Berechnen Sie
$$\mathrm{ggT}(X^4 - 3X^3 - 2X^2 + 3X + 1, X^3 - 6X^2 + 8X + 3).$$
mit dem Euklidischen Algorithmus.

Bitte wenden!

Aufgabe H8 (4P)

Sei k ein Körper, $p, q \in k[X] \setminus \{0\}$ Polynome und sei $f \in p \cdot k[X] + q \cdot k[X]$ das eindeutige normierte Polynom mit minimalem Grad (welches nach P8 immer existiert).

1. Zeigen Sie, dass $f \cdot k[X] \subseteq p \cdot k[X] + q \cdot k[X]$ gilt.

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Polynomdivision, dass auch $f \cdot k[X] \supseteq p \cdot k[X] + q \cdot k[X]$ gilt.

Im Folgenden dürfen Sie Teil 1. und 2. auch ohne Beweis verwenden.

3. Zeigen Sie, dass $f \mid p$, $f \mid q$ und $\deg(f) \leq \deg(\mathrm{ggT}(p, q))$ gelten.

4. Schließen Sie mit Hilfe von P8, dass

$$p \cdot k[X] + q \cdot [X] = f \cdot k[X] = \mathrm{ggT}(p, q) \cdot k[X].$$

   und $f = \mathrm{ggT}(p, q)$ gelten.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst den entsprechenden Sachverhalt im Ring der ganzen Zahlen und übertragen Sie die Argumentation dann auf Polynomringe.