Übung zu Algebraische und Geometrische Strukturen in der Mathematik, SoSe 2014

2. Übungsblatt

Aufgabe P5

Sei $k \subseteq E$ ein Teilkörper und $a \in E \backslash k$. Für ein Polynom $p = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i \in k[X]$ sei $p(a) := \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a^i$. Zeigen Sie, dass dann

$$k(a) = \left\{ \frac{p(a)}{q(a)} \mid p, q \in k[X] \text{ und } q(a) \neq 0 \right\}.$$

Hinweis: Sie können hier ohne Beweis die Identitäten $p(a) + p'(a) = (p + p')(a)$ und $p(a) \cdot p'(a) = (p \cdot p')(a)$ für alle $p, p' \in k[X]$ verwenden.

Aufgabe P6

Seien k, E Körper, sodass $k \subseteq E$ und $[E : k]$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass es dann keinen Körper F mit $k \subsetneq F \subsetneq E$ geben kann. Folgern Sie daraus, dass für jedes $\alpha \in E \setminus k$ gilt, dass $k(\alpha) = E$.

Aufgabe P7

Sei X eine Menge.

1. Zeigen Sie, dass der Schnitt zweier Äquivalenzrelationen $R_1 \cap R_2$ (als Teilmengen von $X \times X$) wieder eine Äquivalenzrelation ist. Überzeugen Sie sich davon, dass dies auch für den Schnitt $\bigcap_{i \in I} R_i$ einer Familie von Äquivalenzrelationen $(R_i)_{i \in I}$ der Fall ist.
2. Definieren Sie die von einer beliebigen Teilmenge $P \subseteq X \times X$ erzeugte Äquivalenzrelation.
3. Was ist die von der leeren Menge erzeugte Äquivalenzrelation? Was ist die von der Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ erzeugte Äquivalenzrelation? Was ist die von der „a kennt b“ erzeugte Äquivalenzrealtion auf der Menge aller Menschen?

Hausübungen

Aufgabe H4 (4P)

Sei k ein Körper. Verifizieren Sie in dem Polynomring $k[X]$ die beiden Formeln

$$\deg(p \cdot q) = \deg(p) + \deg(q)$$
$$\deg(p + q) \leq \max\{\deg(p), \deg(q)\},$$

wobei deg den Grad des Polynoms angibt. Bestimmen Sie außerdem in $k[X]$ die multiplikativ invertierbaren Elemente. Vergewissern Sie sich insbesondere davon, dass $k[X]$ kein Körper ist!

Bitte wenden!

Aufgabe H5 (4P)

Es sei $k \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper.

1. Seien $k, E \subseteq \mathbb{C}$ Unterkörper mit $k \subseteq E$ und $v \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass dann $k(v) \subseteq E$ genau dann gilt, wenn $v \in E$.

2. Seien $v, w \in \mathbb{C} \setminus k$ mit $v^2, w^2 \in k$. Zeigen Sie, dass $k(v) = k(w)$ genau dann, wenn es ein $c \in k \setminus \{0\}$ gibt, sodass $v = c \cdot w$.

Im Folgenden dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ und $\sqrt{\frac{3}{2}}$ nicht in $\mathbb{Q}$ enthalten sind. Außerdem dürfen Sie Teil 1. und 2. ohne Beweis verwenden.

3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

4. Folgern Sie aus 2. und 3., dass $[\mathbb{Q} : \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})] = 4$.

Aufgabe H6 (4P)

Sei k ein Körper, V ein k-Vektorraum und $F : V \to V$ eine k-lineare Abbildung. Wir schreiben $\mathrm{End}_V := \{G : V \to V \mid V \text{ ist } k\text{-linear}\}$. Dann definieren wir

$$\Phi_F : k[X] \longrightarrow \mathrm{End}_V,$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i F^i,$$

wobei F^i für $i \in \mathbb{N}$ die i-fache Komposition von F mit sich selbst bezeichnet.

1. Sei $k = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dargestellt ist. Berechnen Sie $\Phi_F(X^2 + 1)$.

2. Zeigen Sie, dass Φ_F eine k-lineare Abbildung und ein Homomorphismus von Ringen ist. Schließen Sie daraus, dass $k[F] := \{\Phi_F(P) \mid P \in k[X]\}$ ein k-Vektorraum (bezüglich der Addition von Endomorphismen und der Multiplikation von Endomorphismen mit Skalaren) und ein Ring (bezüglich der Komposition von Endomorphismen) ist.

3. Zeigen Sie: Wenn $\dim_k(V) = n$ für eine natürliche Zahl n, dann gibt es ein normiertes Polynom P mit $\deg(P) \leq n^2$, sodass $\Phi_F(P) = 0$.

   Hinweis: Aus der linearen Algebra wissen Sie, dass End_V ein k-Vektorraum ist. Wenn V ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, wie hängen dann $\dim_k(V)$ und $\dim_k(\mathrm{End}_V)$ zusammen?

Bemerkung: Aus Aufgabe 3 folgt, dass es für einen endlich-dimensionalen k-Vektorraum V und eine k-lineare Abbildung $F : V \to V$ ein eindeutig bestimmtes normiertes Polynom $P \in k[X]$ von minimalem Grad gibt, sodass $\Phi_F(P) = 0$. Dieses Polynom nennen wir das *Minimalpolynom von F*.