Übung zur Analysis 2, SS 2010

Übungsblatt zu Pfingsten

Aufgabe P1 (7P)

Sind die folgenden Aussagen jeweils wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

Integration:

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wenn f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar ist für alle $-\infty < a < b < \infty$, so existiert das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.
2. Die Menge $\mathcal{R}$ der Riemann-integrierbaren komplexen Funktionen auf $[a, b]$ ist eine Algebra.
3. Ist $g(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ beliebig oft differenzierbar.

Gleichmäßige Konvergenz: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiere gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

1. Sei $x \in \mathbb{R}$. Falls $\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n$ für alle n, so auch $\lim_{t\to x} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$.
2. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

Fourier-Reihen:

1. Für die Fourierkoeffizienten $c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\, dx$ zweier integrierbarer, 2π-periodischer Funktionen f, g gilt
$$c_n(f + g) = c_n(f) + c_n(g) \quad \text{und} \quad c_n(f \cdot g) = c_n(f) \cdot c_n(g).$$
2. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und Riemann-integrierbar auf $[-\pi, \pi]$ und kann man f auf $\mathbb{R}$ in eine Potenzreihe um 0 entwickeln, so konvergiert die Fourierreihe von f auf ganz $\mathbb{R}$ gegen f.

Aufgabe P2 (8 P)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wobei

$$a_n := \binom{\alpha}{n} := \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha - i)}{\prod_{j=1}^{n} j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

1. Zeigen Sie, dass diese Potenzreihe für alle x mit $|x| < 1$ kovergiert.
Hinweis: Das geht z.B. mit dem Quotientenkriterium.

2. Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ stetig differenzierbar ist, und die Gleichung

$$f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} f(x)$$

erfüllt.
Hinweis: Berechnen Sie die Potenzreihen-Entwicklung von $\alpha f(x) - x f'(x)$ und vergleichen Sie diese mit der von $f'(x)$.

3. Zeigen Sie, dass $f(x) = (1+x)^\alpha$ für $|x| < 1$ gilt.

Zusatzaufgabe (0 P): Zeigen Sie, dass $F(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$ für fixes $x \in \mathbb{R}$ als eine Potenzreihe in t geschrieben werden kann, dass also für jedes feste $x \in \mathbb{R}$

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) t^n$$

für t in einer Umgebung von 0 gilt. Berechnen Sie $p_0(x)$, $p_1(x)$ und $p_2(x)$ und zeigen Sie, dass diese mit den ersten drei Legendre-Polynomen übereinstimmen.

Aufgabe P3 (9 P) – Unendliche Produkte

1. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x/(1-x)$. Was ist der Konvergenzradius der Reihe?

2. Zeigen Sie, dass

$$|\log(1+x)| \leq 2|x| \quad \text{für alle } x \in [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}].$$

Hinweis: Betrachten Sie die Potenzreihe für $\log(1+x)$, und vergleichen Sie diese mit der Reihe aus Teil 1.

3. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiere. Sei

$$p_N = \prod_{n=1}^{N} (1+a_n) = (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_N) \ .$$

Zeigen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{N\to\infty} p_N$ existiert.

Hinweis: Führen Sie das Problem mittels $\log(x)$ auf eine unendliche Reihe zurück. Zeigen Sie, dass es ein M gibt, so dass $|a_k| \leq \frac{1}{2}$ für alle $k \geq M$.

Bemerkung: Diesen Grenzwert nennt man auch das *unendlich Produkt*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n) := \lim_{N\to\infty} p_N \ .$$

4. Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Zeigen Sie, dass $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ existiert.