Übung zur Analysis 2, SS 2010

Letztes Übungsblatt

Aufgabe 122 (6P)

Sind die folgenden Aussagen richtig? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

1. Es sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann konvergiert $\int_0^\infty f(x)\ dx$ falls für alle $c > 0$ das Integral $\int_0^c f(x)\,dx$ existiert.
2. Sind $p_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Polynome und konvergiert $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen p, so ist p
   (a) stetig.
   (b) ein Polynom.
3. Ist $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, so konvergiert $\sum_{n=0}^\infty a_n x^{n+1}$ absolut falls $|x| < R$.
4. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ partiell differenzierbar in x_0, so ist f stetig in x_0.
5. Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{>0}$ stetig und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y = f(x, y)$, so ist φ injektiv.

Aufgabe 123 (5P)

Wir betrachten die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + 2y' + 2y = 0, \tag{1}$$

also $y'' = f(x, y, y')$ mit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = -2y - 2z$. Diese Differentialgleichung modelliert eine gedämpfte Schwingung.

1. Zeigen Sie, dass $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$ mit $\varphi_1(x) = e^{-x}\sin(x)$ und $\varphi_2(x) = e^{-x}\cos(x)$ Lösungen von (1) sind.
2. Zeigen Sie, dass jede Linearkombination $\varphi(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x)$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung von (1) ist.
3. Finden Sie die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die das Anfangswertproblem $\varphi(0) = 1$ und $\varphi'(0) = 1$ löst.

Aufgabe 124 (5P)

Welche der folgenden Integrale konvergieren? Berechnen Sie im Fall von Konvergenz den Wert des Integrals:

1. $$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$$

2. $$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Aufgabe 125 (4P)

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k(1-x)$$

punktweise konvergiert. Bestimmen Sie die Grenzfunktion und zeigen Sie, dass die Konvergenz nicht gleichmäßig sein kann.

Aufgabe 126 (4P)

Ein Beispiel aus der Wirtschaftsmathematik: Ein Verbraucher habe die Cobb-Douglas Nutzenfunktion $n : \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $n(x,y) = Ax^\alpha y^\beta$ mit $A, \alpha, \beta > 0$ (er versucht also die Funktionswerte dieser Funktion zu maximieren, eine konkrete Wahl von A, α und β spiegelt dann die Modellierung eines realen Problems wieder, siehe `http://de.wikipedia.org/wiki/Cobb-Douglas-Funktion`). Gleichzeitig unterliege der Verbraucher der Budgetbeschränkung $p(x,y) \leq M$ für $P : \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto px + qy$ mit $p, q > 0$ (hierbei modellieren p und q den Preis der Waren x und y, der in diesem Modell als linear wachsend angenommen wird).

Ermitteln Sie das Haushaltsoptimum für fixe Werte von A, α, β, p und q, also den größtmöglichen Wert von $n(x,y)$ unter der Nebenbedingung $p(x,y) \leq M$. (**Hinweis:** Warum genügt es hier den Fall $p(x,y) = M$ zu betrachten?)