Übung zur Analysis 2, SS 2010

12. Übungsblatt

Aufgabe 118 (5 P)

Wählen Sie für die folgenden Differentialgleichungen eine der Lösungsmethoden a), b), c) aus, und begründen Sie kurz, warum diese anwendbar ist.
a) getrennte Variablen
b) lineare homogene Differentialgleichung
c) Variation der Konstanten
(Sie brauchen die Gleichungen nicht zu lösen.)

1. $y' = xy$ für $x, y > 0$ und $\varphi(1) = 1$.
2. $y' = \cos(x)y + \sin(x)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varphi(0) = 0$.
3. $y' = x/y + x + 1/y + 1$ für $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ und $\varphi(0) = 1$.

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ eine Funktion, die lokal bezüglich y einer Lipschitz-Bedingung gehorcht (wie in Fo2 §12 definiert). Für fixes x ist die Funktion $F_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert als $F_x(y) = f(x, y)$.
Stimmen die folgenden Aussagen? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

4. F_x ist stetig auf $\mathbb{R}^n$.
5. F_x ist differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 119 (8 P)

1. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Lösen Sie $y' = ay + b$ auf $\mathbb{R}$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = c$.
2. Prüfen durch direktes Einsetzen, dass Ihre Lösung aus Teil 1. die Anfangsbedingung erfüllt und die Differentialgleichung löst (für $a = 0$ und $a \neq 0$).
3. Lösen Sie $y' = \sin(x) \exp(y)$ auf $I =]-p, p[$ mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$. Was ist der größte Wert von p, so dass die Lösung auf I existiert?
4. Prüfen durch direktes Einsetzen, dass Ihre Lösung aus Teil 3. die Anfangsbedingung erfüllt und die Differentialgleichung löst.

Aufgabe 120 (4 P)

Sei I ein Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig. Betrachten Sie für $\alpha \neq 1$ die Differentialgleichungen

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha \quad \text{auf } I \times \mathbb{R}_{>0} \ , \tag{1}$$

und

$$y' = (1-\alpha)f(x)y + (1-\alpha)g(x) \quad \text{auf } I \times \mathbb{R}_{>0} \ . \tag{2}$$

Sei $I' \subset I$ ein Intervall, und seinen $\varphi, \psi : I' \to \mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar. Es gelte

$$\varphi(x)^{1-\alpha} = \psi(x) \qquad \text{für alle } x \in I' \quad .$$

Zeigen Sie, dass $\varphi(x)$ die Differentialgleichung (1) genau dann löst, wenn $\psi(x)$ die Differentialgleichung (2) löst.

Aufgabe 121 (7 P)

Für diese Aufgabe können Sie Aufgabe 120 auch ohne Beweis verwenden.

1. Für $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}_{>0}$ sei die Differentialgleichung

   $$y' = xy - \exp(-x^2/2)\, y^2$$

   gegeben. Geben Sie die Lösung $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ an, die der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 2$ genügt.

   Rechnen Sie durch Einsetzen nach, dass Ihre Funktion $\varphi(x)$ in der Tat die obige Differentialgleichung löst und der Anfangsbedingung genügt.

2. Für $\alpha \neq 1$ und $y \in \mathbb{R}_{>0}$ sei die Differentialgleichung

   $$y' = y + y^\alpha$$

   gegeben. Sei ferner $c > 0$. Finden Sie ein möglichst großes Intervall I mit $0 \in I$ und eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}_{>0}$, so dass $\varphi(x)$ die Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $\varphi(0) = c$ auf I löst.