Übung zur Analysis 2, SS 2010

10. Übungsblatt

Aufgabe 108 (6 P)

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.

Es sei X eine beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

1. Jede Kontraktion $f : X \to X$ ist stetig.
2. Jede Kontraktion $f : X \to X$ hat einen Fixpunkt $x \in X$.

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \neq \emptyset$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar.

3. Existiert ein $x \in U$ so dass $df(x)$ invertierbar ist, so gilt $m = n$.
4. Ist $df(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar, so ist f surjektiv.
5. Ist f bijektiv, so ist f^{-1} differenzierbar.
6. Ist f bijektiv und ist die Jacobi-Determinante $J_f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, so ist f^{-1} stetig differenzierbar.

Aufgabe 109 (4 P) – Satz über die Umkehrfunktion

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 - y \\ x + 3x^2y - y^3 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie $[df(x, y)]$.
2. Bestimmen Sie $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid df(x, y) \text{ ist nicht invertierbar}\}$.
3. Berechnen Sie $f(x, -x)$ und zeigen Sie, dass die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}^2 \backslash B$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 110 (6 P) – Satz über implizite Funktionen
Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$. Sei

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

1. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.
2. Auf welche $(x, y) \in X$ lässt sich der Satz über implizite Funktionen (Satz R:9.28) anwenden (also wann ist $h \mapsto df(x, y)(h, 0)$ invertierbar)?
3. Es sei $(a, b) \in X$ mit $a < 0$. Bestimmen Sie eine offene Umgebung W von b und eine stetig differenzierbare Funktion $g : W \to \mathbb{R}$ so dass $f(g(y), y) = 0$ und $g(b) = a$ gilt.
4. Berechnen Sie $g'(y)$ zum einen durch direktes Ableiten der in Teil 3. gefundenen Funktion und zum anderen mit Formel R:(9.58).

Aufgabe 111 (5 P) – Partielle Ableitungen vertauschen im Allgemeinen nicht
Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

1. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $D_i f(x, y)$ für $i = 1, 2$ und $(x, y) \neq (0, 0)$.
2. Berechnen Sie $D_i f(0, 0)$ (z.B. mit Formel R:(9.25)) und zeigen Sie, dass $D_i f$ für $i = 1, 2$ stetig ist.
3. Zeigen Sie $D_1 D_2 f(0, 0) \neq D_2 D_1 f(0, 0)$.

Aufgabe 112 (3 P) – Ableitung der Inversion
Wir identifizieren $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit dem Raum der reellen $n \times n$-Matrizen. Es sei $\Omega := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}$.

1. Zeigen Sie, dass Ω offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{Inv} : \Omega \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $A \mapsto A^{-1}$ differenzierbar ist und dass $d\,\mathrm{Inv}(A)H = -A^{-1}HA^{-1}$ gilt.