Übung zur Analysis 2, SS 2010

9. Übungsblatt

Aufgabe 102 (3 P)

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.

1. Jede lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^m$ hat einen Fixpunkt.
2. Jede lineare Abbildung vom $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^m$ ist kontrahierend.
3. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$. Existieren alle partiellen Ableitungen von f auf U und sind diese stetig, so ist auch f stetig.

Aufgabe 103 (3 P)

Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und konvex, $f : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar auf ganz U, und $\|df(x)\| \leq M$ für alle $x \in U$ und ein $M > 0$. Zeigen Sie, dass wenn U beschränkt ist, so auch f beschränkt ist.

Aufgabe 104 (3 P) – Kugelkoordinaten

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(r, \alpha, \beta) = \big(r\,\cos(\alpha)\,,\; r\,\sin(\alpha)\,\cos(\beta)\,,\; r\,\sin(\alpha)\,\sin(\beta)\big)\ .$$

Berechnen Sie die Matrixdarstellung $[df(r, \alpha, \beta)]$ von df an der Stelle (r, α, β).

Aufgabe 105 (5 P)

Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3)$, und $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $f(p) = 1/|p|$.

1. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ differenzierbar ist.
2. Berechnen Sie die Ableitung von $g(t) = f(\gamma(t))$ an der Stelle t auf zwei Weisen. Zum einen, indem Sie $g(t)$ ausrechnen und direkt ableiten, und zum andern indem Sie die Kettenregel wie in Beispiel R:9.18 verwenden.

Aufgabe 106 (5 P)

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$. Seien $f_k : U \to \mathbb{R}$ die Komponentenfunktionen von f, also $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Die Funktionen f_k $(k = 1, \ldots, n)$ seien differenzierbar an der Stelle $x \in U$. Zeigen Sie, dass auch f in x differenzierbar ist.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt auch, und kann gerne als Zusatzaufgabe (mit 0P) gezeigt werden.

Aufgabe 107 (5 P)
Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$, so dass die partiellen Ableitungen $D_i f$ für alle $i = 1, ..., n$ auf ganz U existieren. Außerdem seien die Abbildungen $D_i f : U \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$ beschränkt. Beweisen Sie, dass f stetig ist.

Hinweis: Schreiben Sie

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} \Big(f(x+v_k) - f(x+v_{k-1}) \Big) \ ,$$

wobei $v_0 = 0$, $v_k = \sum_{i=1}^{k} h_i e_i$ für $k = 1, ..., n$ und $e_1, ..., e_n$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Wenden Sie dann den Mittelwertsatz an, um $|f(x+h) - f(x)|$ abzuschätzen.