Übung zur Analysis 2, SS 2010

8. Übungsblatt

Aufgabe 98 (6 P)

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit Ja oder Nein. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.

1. Wenn die Operatornorm von $A \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ungleich Null ist, so ist A invertierbar.
2. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Sinne von Definition R:9.11, so ist f auch differenzierbar im Sinne von Definition R:5.1.
3. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar, so ist die Ableitung df von f wieder eine Funktion $df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
4. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, so ist f differenzierbar.
5. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$, dann existiert für jedes $x \in U$ ein $\delta > 0$, so dass $f(x+h)$ definiert ist für $|h| < \delta$.
6. Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in x differenzierbar mit $df(x) = A$, so gilt
$$f(x+h) = f(x) + A(h)$$
für ein $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| > 0$.

Aufgabe 99 (6 P) – Operatornorm

Für eine lineare Abbildung $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ bezeichne $\|A\|$ die Operatornorm von A wie in R:9.6 definiert.

1. Sei $B \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ beschrieben durch die 2×2-Matrix
$$[B] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} ,$$
wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\|B\| = \max(|a|, |b|)$.
2. Sei $B \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^2)$, also eine invertierbare lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Finden Sie ein Gegenbeispiel für die Behauptung, dass $\|B\| \cdot \|B^{-1}\| = 1$.

Aufgabe 100 (4 P) – Differential nach Definition

Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeben durch $f(x, y) = (x^2 y, y^2)$. Es seien $p, h \in \mathbb{R}^2$. Definieren Sie $r(h)$ durch

$$f(p+h) - f(p) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} h + r(h) \qquad \text{wobei } p = (x, y) \ ,$$

und zeigen Sie, dass $\lim_{h \to 0} |r(h)|/|h| = 0$.

Hinweis: Für $h = (a, b)$ gilt $|a| \leq |h|$ und $|b| \leq |h|$. Dies kann zum Abschätzen von Ausdrücken der Form $|abx|$, $|a^2 y|$, etc., verwendet werden.

Aufgabe 101 (8 P) – Partielle Ableitungen

Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ im Punkt $(x, y) = (0, 0)$ existieren.
2. Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ nicht stetig ist.
3. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ in jedem Punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ ebenfalls existieren.