Übung zur Analysis 2, SS 2010

6. Übungsblatt

Aufgabe 90 (8 P)

Separieren folgende Mengen von Funktionen Punkte ihres Definitionsbereichs? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $\{f : X \to \mathbb{R}\}$, also die Menge aller reellwertigen Funktionen auf einer beliebigen Menge X
2. $\{x^m(1-x)^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, m, n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ ist linear}\}$ (zur Erinnerung: f ist linear, falls für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ $f(cx+y) = cf(x) + f(y)$ gilt).

Sind die folgenden Mengen von Funktionen Algebren? Begründen Sie auch hier Ihre Antwort.

1. $\{f : \{1,2\} \to \mathbb{C}\}$
2. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(x) \geq 0\}$
3. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,|\, f \text{ differenzierbar auf } \mathbb{R}\}$
4. $\mathcal{C}(\mathbb{R})$
5. $\{x^n : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 91 (8 P)

Sei X ein metrischer Raum. Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathcal{C}(X)$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen f und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen g.

1. Zeigen Sie, dass $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f + g$ konvergiert.
2. Zeigen Sie $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ für die Supremumsnorm auf $\mathcal{C}(X)$.
3. Zeigen Sie, dass $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen fg konvergiert.
   Hinweis: $\|fg - f_n g_n\| = \|f(g - g_n) + (f - f_n)g_n\|$
4. Sei A eine Algebra in $\mathcal{C}(X)$. Zeigen Sie, dass der gleichmäßige Abschluss $\bar{A}$ von A ebenfalls eine Algebra ist.

Aufgabe 92 (4 P)

1. Sei M eine Menge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge von Funktionen $f_n : M \to \mathbb{C}$ und sei $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass die Folge $(F \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

2. Sei X ein kompakter metrischer Raum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$ und sei $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Folge $(F \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 93 (4 P)

Sei $E_1 = \{x^n : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ und $E_2 = \{(\frac{1}{2}x)^n : [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass in $\mathcal{C}([0,1])$ gilt $\bar{E}_1 = E_1$ und $\bar{E}_2 = E_2 \cup \{0 : [0,1] \to \mathbb{R}\}$.