Übung zur Analysis 2, SS 2010

5. Übungsblatt

Aufgabe 87 (6 P) — Potenzreihen

Sei $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Ist $0 < r < R$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$.
2. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k$ konvergiert genau dann wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (-R)^k$ konvergiert.
3. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ konvergiert punktweise gegen die Funktion $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$.
4. f (aus Teil 3.) ist eine auf $]-R, R[$ differenzierbare Funktion.
5. Der Konvergenzradius der Potenzreihe
$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$$
ist ebenfalls R.
6. Die Funktion $f(x) = |x|$ kann man um 0 in eine Potenzreihe entwickeln.

Aufgabe 88 (4 P) — Potenzreihen und die geometrische Reihe

1. Konstruieren Sie ein Gegenbeispiel welches zeigt, dass für eine Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ der Funktion $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ mit positivem Konvergenzradius R das uneigentliche Integral
$$\int_{-R}^{R} f(t)\, dt$$
im Allgemeinen nicht konvergiert.
2. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ den Konvergenzradius $R = 1$ hat und dass für $x \in]-1, 1[$
$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Hinweis: In beiden Teilen kann die geometrische Reihe nützlich sein.

Aufgabe 89 (14 P) — Funktionenfolgen

Sei

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\varphi)}{k} \ .$$

1. Zeigen Sie, dass für $0 < \varphi < 2\pi$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\varphi}/k$ konvergiert.

   Hinweis: Begründen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi} = (1 - e^{i(n+1)\varphi})/(1 - e^{i\varphi})$ und schliessen Sie, dass $|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi}| \leq 1/\sin(\varphi/2)$. Erinnern Sie sich an Satz 4.9.1=R:3.42.

2. Zeigen Sie, dass die Reihe $f(\varphi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ konvergiert, und dass $f(\varphi) = f(\varphi + 2\pi)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$.

3. Für einen fixen Wert von $\varphi \in \mathbb{R}$ und für alle $x \in [0, 1]$ sei

   $$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\varphi)}{k} x^k \ .$$

   Zeigen Sie, dass die Reihe auf $[0, 1]$ gleichmäßig konvergiert.

4. Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ gilt

   $$g'(x) = \frac{\sin\varphi}{1 + x^2 - 2x\cos\varphi} \ .$$

   Hinweis: Begründen Sie zunächst, warum $g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\varphi) x^{k-1}$. Drücken Sie dann $\sin(k\varphi)$ durch die Exponentialfunktion aus.

5. Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$ gilt

   $$g(x) = \arctan\Big(\frac{x\sin\varphi}{1 - x\cos\varphi}\Big) \ .$$

6. Zeigen Sie, dass $f(\varphi) = \frac{1}{2}(\pi - \varphi)$ für $\varphi \in]0, 2\pi[$.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\tan(\frac{1}{2}(\pi - \varphi)) = \sin\varphi/(1 - \cos\varphi)$.

(Für Teil 4 gibt es 4P, für alle anderen Teile 2P.)