Übung zur Analysis 2, SS 2010

4. Übungsblatt

Aufgabe 84 (6 P) – Gleichmäßige und punktweise Konvergenz

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$. Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert bezeichne f die Grenzfunktion. Sind die folgenden Implikationen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig und $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ existiert für $x_0 \in [a,b]$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise $\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig
3. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig $\Rightarrow$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise
4. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig $\Rightarrow$ f ist stetig
5. f_n ist differenzierbar und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig
$$\Rightarrow f \text{ is differenzierbar mit } \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$$
6. $f_n \in \mathcal{R}$ auf $[a,b]$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig
$$\Rightarrow f \in \mathcal{R} \text{ auf } [a,b] \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Aufgabe 85 (6 P) – Funktionenfolgen

Bestimmen Sie, ob die die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergieren und geben Sie ggf. die Grenzfunktion an. Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert: Ist die Grenzfunktionen stetig? Ist die Konvergenz gleichmäßig? Begründen Sie Ihre Antwort.

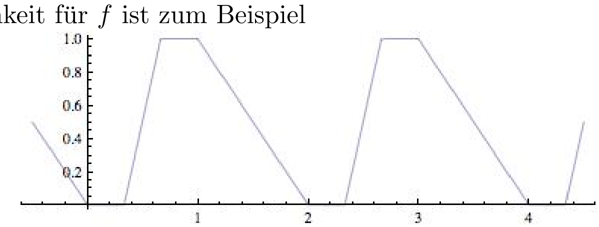
1. $f_n :]0,\infty[\to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$
2. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x \cdot \sin(nx)$
3. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx^4 e^{-nx^2}$

Aufgabe 86 (12 P) – Raumfüllende Kurve

Sei $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ stetig mit folgenden Eigenschaften:

- f ist periodisch mit Periode 2: $f(t) = f(t+2)$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
- $f(t) = 0$ für $t \in [0, \frac{1}{3}]$ und $f(t) = 1$ für $t \in [\frac{2}{3}, 1]$.

Eine Möglichkeit für f ist zum Beispiel



Definiere die Funktionen $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ als

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1} t) \quad \text{und} \quad v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-2} t) \ .$$

Zeigen Sie:

1. u und v sind stetig auf $[0,1]$, und $u(t), v(t) \in [0,1]$ für alle $t \in [0,1]$.
2. Für eine Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $a_i \in \{0,1\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ setze
$$t_0 = 2 \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} a_i \ .$$
Zeigen Sie für alle Wahlen der Folge $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, dass die Reihe konvergiert, und dass $t_0 \in [0,1]$.
3. Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$ gilt $f(3^{k-1} t_0) = a_k$.
Hinweis: Das ist der kniffelige Teil. Eventuell erstmal überspringen.
4. Zeigen Sie, dass
$$u(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n} \quad \text{und} \quad v(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n-1} \ .$$
5. Sei $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\Phi(t) = (u(t), v(t))$. Zeigen Sie, dass Φ eine *surjektive* und *stetige* Abbildung von $[0,1]$ auf das Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ definiert.
Hinweis: Verwenden Sie die Binärdarstellung der reellen Zahlen (ohne Beweis). Diese ist ähnlich der Dezimaldarstellung aus Aufgabe 12, man verwendet nur 2 statt 10 und $0, 1$ statt $0, 1, \ldots, 9$.
6. Zusatzaufgabe mit 0P: Ist Φ injektiv?