Übung zur Analysis 2, SS 2010

3. Übungsblatt

Aufgabe 79 (6 P) – Uneigentliche Integrale

Für welche $c \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden uneigentlichen Integrale? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

1. $\displaystyle\int_0^1 t^c \, dt$
2. $\displaystyle\int_1^\infty t^c \, dt$
3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{ct} \, dt$

Aufgabe 80 (5 P) – Berechnung von Integralen

Berechnen Sie

1. $\displaystyle\int_0^\pi e^t \sin(t) \, dt,$
2. $\displaystyle\int_0^1 e^t \sinh(t) \, dt,$
3. $\displaystyle\int_x^1 \log(t) \, dt \quad \text{für } 0 < x < 1,$
4. $\displaystyle\int_1^x t \cdot \log(t) \, dt \quad \text{für } 1 < x,$
5. $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin^2(t) \, dt.$

Aufgabe 81 (4 P) – Uneigentliche Integrale

Bestimmen Sie, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren und geben Sie ggf. deren Wert an. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

1. $\displaystyle\int_0^1 \log(t) \, dt,$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^2} dt \quad$ (Hinweis: vgl. Aufgabe 69).

Aufgabe 82 (3 P) – Schraubenlinie

Für $r, \lambda > 0$ sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t), \lambda t) \ .$$

Sei $w > 0$. Berechnen Sie die Länge der Kurve, die man durch Einschränken von γ auf das Intervall $[0, 2\pi w]$ erhält. (Die reelle Zahl w kann man als Windungszahl der Schraubenlinie auffassen.)

Aufgabe 83 (6 P) – Gamma-Funktion

1. Zeigen Sie, dass das Integral $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ für alle $x > 0$ konvergiert.
2. Zeigen Sie, dass das Integral $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$ für alle $x > 0$ konvergiert.
3. Für $0 < x < \infty$ sei
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \ .$$
Nach Teilen 1 und 2 konvergiert das Integral. Zeigen Sie, dass für $0 < x < \infty$ gilt
$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \ .$$
Betrachten Sie hierzu $\int_a^b t^{x-1}e^{-t}dt$ mit $0 < a < b < \infty$, verwenden Sie partielle Integration, und nehmen Sie die Grenzwerte $a \to 0$ und $b \to \infty$.
4. Zeigen Sie, dass $\Gamma(1) = 1$, und dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$.