Übung zur Analysis 2, SS 2010

2. Übungsblatt

Aufgabe 74 (5 P) — Integral unstetiger Funktionen
Sei

$$I : [-1, \infty[\to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ falls } t \leq 0 \\ 1 \text{ falls } t > 0 \end{cases} .$$

1. Zeigen Sie, dass $I \in \mathcal{R}$ auf $[-1, x]$ für $x > -1$.
2. Es sei $F : [-1, \infty[\to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_{-1}^{x} I(t)\, dt$. Berechnen Sie F.
3. In welchen Punkten ist F stetig, in welchen differenzierbar?

Aufgabe 75 (6 P) — Berechnung von Riemann-Integralen
Berechnen Sie

1. $\int_0^1 e^t + 1\, dt$
2. $\int_{-1}^1 \sin(t)\, dt$
3. $\int_0^x te^{t^2}\, dt$ für $x \in [0, \infty[$
4. $\int_0^x t^a\, dt$ für $a > 0$ und $x \in [0, \infty[$
5. $\int_0^x a^t\, dt$ für $a > 0$ und $x \in [0, \infty[$
6. $\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt$ für $f : [0, \infty[\to]0, \infty[$ stetig differenzierbar

mit Hilfe von Satz R:6.21.

Aufgabe 76 (4 P) — Eigenschaften des Stieltjes-Integrals
Es sei α monoton steigend auf $[a, b]$.

1. Beweisen Sie Satz R:6.12(e) Teil 2. (natürlich ohne dessen Verwendung): Ist $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a, b]$ und $c \geq 0$, dann ist $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ auf $[a, b]$ und es gilt

$$\int_a^b f\, d(c\alpha) = c \int_a^b f\, d\alpha.$$

   Warum ist die Voraussetzung $c \geq 0$ hierfür wichtig?

2. Beweisen Sie, dass $1 \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a, b]$ und dass

$$\int_a^b 1\, d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Aufgabe 77 (4 P) — Mittelwertsatz der Integralrechung
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie, dass dann ein $x \in [a, b]$ existiert, so dass

$$\int_a^b f\,dt = f(x)(b-a)$$

gilt. **Hinweis:** was können Sie über die Extrema der Funktion

$$[a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)(b-a)$$

aussagen?

Aufgabe 78 (5 P) — Integral bezüglich des Integranden

1. Berechnen Sie $\int_a^b t\,dt$
2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton steigend und stetig differenzierbar. Berechnen Sie das Stieltjes-Integral
$$\int_a^b f\,df.$$
indem Sie es auf ein Riemann-Integral zurückführen.
3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton steigend und stetig, aber nicht mehr notwendigerweise differenzierbar. Berechnen Sie
$$\int_a^b f\,df.$$
mit Hilfe der Substitutionsregel und vergleichen Sie die Ergebnisse.