# Übung zur Analysis 2, SS 2010

**1. Übungsblatt**

---

**Aufgabe 71** (6 P)
Zeigen Sie, dass

$$\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2} \quad , \quad \sin(\pi/6) = 1/2 \quad , \quad \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2 \; .$$

Hinweis: $(e^{i\pi/4})^2 = i$, $(e^{i\pi/6})^3 = i$, $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$.

**Aufgabe 72** (14 P) – Konvexe Funktionen
Eine Funktion $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ heisst *konvex*, wenn für alle $x, y \in ]a, b[$ und alle $\lambda \in ]0, 1[$ gilt, dass

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \; .$$

1. Setzen Sie $q(x) = x^2$. Betrachten Sie $g(\lambda) = q(\lambda x + (1-\lambda)y)$ und $h(\lambda) = \lambda q(x) + (1-\lambda)q(y)$ für $x = 2$ und $y = 1/2$. Zeichnen Sie $g$ und $h$ für $\lambda \in [0, 1]$ im gleichen Koordinatensystem.

2. Sei $f : ]a, b[ \to ]c, d[$ konvex, und sei $g : ]c, d[ \to \mathbb{R}$ konvex und monoton steigend. Zeigen Sie, dass $g \circ f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ konvex ist.

3. Sei $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit $f''(x) \geq 0$ für $x \in ]a, b[$. Zeigen Sie, dass $f$ konvex ist.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass $f'(x)$ monoton steigend ist. Nehmen Sie an, dass $x < y$ und setzen Sie $c = \lambda x + (1-\lambda)y$. Was sagt Ihnen der Mittelwertsatz über $f(c) - f(x)$ und $f(y) - f(c)$?

4. Sei $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und konvex. Zeigen Sie, dass $f''(x) \geq 0$.

5. Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen auf ihrem Definitionsbereich konvex sind: $x^2$, $x^3$, $e^x$, $e^{-x}$, $-\log(x)$, $\cos(x)$, $\cosh(x)$.

6. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}$,

   $$f(x) = \left(1 + e^{1/x}\right)^2 + \left(1 + e^{1/x}\right)^4 \; ,$$

   konvex ist.

**Aufgabe 73** (4 P)
Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p, q > 1$ und $1/p + 1/q = 1$. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \geq 0$ gilt

$$x^{1/p} \, y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \; .$$

Hinweis: Finden Sie eine Ungleichung für $-\log(\lambda x + (1-\lambda)y)$.