

Äquivalenzen stetiger und glatter Hauptfaserbündel

Christoph Müller Christoph Wockel

Fachbereich Mathematik
Universität Darmstadt

31. Süddeutsches Kolloquium über Differentialgeometrie

Gliederung

- 1 Die Problemstellung
 - Hauptfaserbündel
 - Äquivalenzen von Hauptfaserbündeln
 - Bekannte und neue Resultate
- 2 Illustration der Beweismethode
 - Glätten von gruppenwertigen Abbildungen
 - Glätten von Bündeläquivalenzen
 - Glätten von Hauptfaserbündeln
 - Hauptresultat
- 3 Zusammenfassung

Gliederung

- 1 Die Problemstellung
 - Hauptfaserbündel
 - Äquivalenzen von Hauptfaserbündeln
 - Bekannte und neue Resultate
- 2 Illustration der Beweismethode
 - Glätten von gruppenwertigen Abbildungen
 - Glätten von Bündeläquivalenzen
 - Glätten von Hauptfaserbündeln
 - Hauptresultat
- 3 Zusammenfassung

Gliederung

- 1 Die Problemstellung
 - Hauptfaserbündel
 - Äquivalenzen von Hauptfaserbündeln
 - Bekannte und neue Resultate
- 2 Illustration der Beweismethode
 - Glätten von gruppenwertigen Abbildungen
 - Glätten von Bündeläquivalenzen
 - Glätten von Hauptfaserbündeln
 - Hauptresultat
- 3 Zusammenfassung

Hauptfaserbündel und Übergangsfunktionen

- G** lokalkonvexe Lie-Gruppe, **auch $\dim(G) = \infty$**
 z.B. $\dim(G) < \infty$, Banach–Lie, Kac–Moody oder $\text{Diff}(N)$
- M** parakompakte MFK, $\dim(M) < \infty$

Hauptfaserbündel (HFB)

- $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ offene, lokal endliche Überdeckung von M , $\overline{U_i}$ kompakt
- $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ Übergangsfunktionen, also
 - $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = \mathbb{1}$ für $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$
 - $g_{ii}(x) = \mathbb{1}$ für $x \in U_i$ ($\Leftrightarrow g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}$ für $x \in U_i \cap U_j$)

Im Folgenden: Hauptfaserbündel (HFB) immer gegeben durch

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

Hauptfaserbündel und Übergangsfunktionen

- G lokalkonvexe Lie-Gruppe, **auch $\dim(G) = \infty$**
 z.B. $\dim(G) < \infty$, Banach–Lie, Kac–Moody oder $\text{Diff}(N)$
- M parakompakte MFK, $\dim(M) < \infty$

Hauptfaserbündel (HFB)

- $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ offene, lokal endliche Überdeckung von M , $\overline{U_i}$ kompakt
- $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ Übergangsfunktionen, also
 - $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = \mathbb{1}$ für $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$
 - $g_{ii}(x) = \mathbb{1}$ für $x \in U_i$ ($\Leftrightarrow g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}$ für $x \in U_i \cap U_j$)

Im Folgenden: Hauptfaserbündel (HFB) immer gegeben durch

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

Hauptfaserbündel und Übergangsfunktionen

- G lokalkonvexe Lie-Gruppe, **auch $\dim(G) = \infty$**
 z.B. $\dim(G) < \infty$, Banach–Lie, Kac–Moody oder $\text{Diff}(N)$
- M parakompakte MFK, $\dim(M) < \infty$

Hauptfaserbündel (HFB)

- $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ offene, lokal endliche Überdeckung von M , $\overline{U_i}$ kompakt
- $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ Übergangsfunktionen, also
 - $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = \mathbb{1}$ für $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$
 - $g_{ii}(x) = \mathbb{1}$ für $x \in U_i$ ($\Leftrightarrow g_{ij}(x) = g_{ji}(x)^{-1}$ für $x \in U_i \cap U_j$)

Im Folgenden: Hauptfaserbündel (HFB) immer gegeben durch

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

Beispiele von Hauptfaserbündeln

Beispiel (Rahmenbündel)

M endlichdim. MFK mit Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$g_{ij} := U_i \cap U_j \ni x \mapsto d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(x)) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

- $d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \cdot d(\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}) \cdot d(\varphi_k \circ \varphi_i^{-1}) \equiv \mathbb{1}$ (Kettenregel)
- $d(\varphi_i \circ \varphi_i^{-1}) = d(\mathrm{id}_{U_i}) \equiv \mathbb{1}$

Weitere Beispiele

- Homogene Räume (auch ∞ -dimensional)
- Bündel von Operatoren auf Hilberträumen

Beispiele von Hauptfaserbündeln

Beispiel (Rahmenbündel)

M endlichdim. MFK mit Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$g_{ij} := U_i \cap U_j \ni x \mapsto d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(x)) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

- $d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \cdot d(\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}) \cdot d(\varphi_k \circ \varphi_i^{-1}) \equiv \mathbb{1}$ (Kettenregel)
- $d(\varphi_i \circ \varphi_i^{-1}) = d(\mathrm{id}_{U_i}) \equiv \mathbb{1}$

Weitere Beispiele

- Homogene Räume (auch ∞ -dimensional)
- Bündel von Operatoren auf Hilberträumen

Beispiele von Hauptfaserbündeln

Beispiel (Rahmenbündel)

M endlichdim. MFK mit Karten $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$g_{ij} := U_i \cap U_j \ni x \mapsto d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(\varphi_j(x)) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

- $d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \cdot d(\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}) \cdot d(\varphi_k \circ \varphi_i^{-1}) \equiv \mathbb{1}$ (Kettenregel)
- $d(\varphi_i \circ \varphi_i^{-1}) = d(\mathrm{id}_{U_i}) \equiv \mathbb{1}$

Weitere Beispiele

- Homogene Räume (auch ∞ -dimensional)
- Bündel von Operatoren auf Hilberträumen

Äquivalenzen von Hauptfaserbündeln

Beobachtung

Gegeben:

- HFB $\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow K)_{i,j \in \mathbb{N}}$
- Abbildungen $(f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$

$$\Rightarrow h_{ij}(x) := f_i^{-1}(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot f_j(x)$$

definiert neues HFB \mathcal{H}

Bündeläquivalenz (BÄ)

Zwei HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}, \mathcal{H} = (h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

heißen *äquivalent*, falls eine Bündeläquivalenz (BÄ) existiert, also $\mathcal{F} = (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$h_{ij}(x) = f_i^{-1}(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot f_j(x).$$

Äquivalenzen von Hauptfaserbündeln

Beobachtung

Gegeben:

- HFB $\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow K)_{i,j \in \mathbb{N}}$
- Abbildungen $(f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$
 $\Rightarrow h_{ij}(x) := f_i^{-1}(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot f_j(x)$

definiert neues HFB \mathcal{H}

Bündeläquivalenz (BÄ)

Zwei HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}, \mathcal{H} = (h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

heißen *äquivalent*, falls eine Bündeläquivalenz (BÄ) existiert, also $\mathcal{F} = (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$h_{ij}(x) = f_i^{-1}(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot f_j(x).$$

Äquivalenzen von Hauptfaserbündeln

Beobachtung

Gegeben:

- HFB $\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow K)_{i,j \in \mathbb{N}}$
- Abbildungen $(f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$
 $\Rightarrow h_{ij}(x) := f_i^{-1}(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot f_j(x)$

definiert neues HFB \mathcal{H}

Bündeläquivalenz (BÄ)

Zwei HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}, \mathcal{H} = (h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

heißen *äquivalent*, falls eine Bündeläquivalenz (BÄ) existiert, also $\mathcal{F} = (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$h_{ij}(x) = f_i^{-1}(x) \cdot g_{ij}(x) \cdot f_j(x).$$

Problemstellung

Definition (Stetige/glatte HFB und Äquivalenzen)

Ein HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

ist **stetig**/glatt, falls alle g_{ij} **stetig**/glatt sind. Eine BÄ

$$\mathcal{F} := (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$$

zwischen **stetigen**/glatten HFB ist **stetig**/glatt, wenn alle f_i **stetig**/glatt sind.

Frage

Existiert zu jedem stetigen HFB ein äquivalentes glattes HFB und zu jeder stetigen BÄ von glatten HFB eine glatte BÄ?

Problemstellung

Definition (Stetige/glatte HFB und Äquivalenzen)

Ein HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

ist stetig/**glatt**, falls alle g_{ij} stetig/**glatt** sind. Eine BÄ

$$\mathcal{F} := (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$$

zwischen stetigen/**glatten** HFB ist stetig/**glatt**, wenn alle f_i stetig/**glatt** sind.

Frage

Existiert zu jedem stetigen HFB ein äquivalentes glattes HFB und zu jeder stetigen BÄ von glatten HFB eine glatte BÄ?

Problemstellung

Definition (Stetige/glatte HFB und Äquivalenzen)

Ein HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

ist stetig/glatt, falls alle g_{ij} stetig/glatt sind. Eine BÄ

$$\mathcal{F} := (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$$

zwischen stetigen/glaten HFB ist stetig/glatt, wenn alle f_i stetig/glatt sind.

Frage

Existiert zu jedem stetigen HFB ein äquivalentes glattes HFB und zu jeder stetigen BÄ von glatten HFB eine glatte BÄ?

Bekannte und neue Resultate

Antwort (klassisch)

Ja, falls $\dim(G) < \infty$: HFB gegeben durch klassifizierende Abbildung $M \rightarrow BG$, BÄ durch Homotopie

↪ glatte Struktur auf BG und Glätten von Homotopien

BG hat i.A. keine glatte Struktur, nur in Ausnahmefällen, z.B. falls $\dim(G) < \infty$ oder $G = \text{Diff}(N)$. Deshalb ist dieser Zugang i.A. nicht möglich!

Antwort (neu)

Ja, auch falls $\dim(G) = \infty$: HFB und BÄ gegeben durch gruppenwertige Abbildungen, die man besser glätten kann.

Bekannte und neue Resultate

Antwort (klassisch)

Ja, falls $\dim(G) < \infty$: HFB gegeben durch klassifizierende Abbildung $M \rightarrow BG$, BÄ durch Homotopie

↪ glatte Struktur auf BG und Glätten von Homotopien

BG hat i.A. **keine** glatte Struktur, nur in Ausnahmefällen, z.B. falls $\dim(G) < \infty$ oder $G = \text{Diff}(N)$. Deshalb ist dieser Zugang i.A. nicht möglich!

Antwort (neu)

Ja, auch falls $\dim(G) = \infty$: HFB und BÄ gegeben durch *gruppenwertige* Abbildungen, die man besser glätten kann.

Bekannte und neue Resultate

Antwort (klassisch)

Ja, falls $\dim(G) < \infty$: HFB gegeben durch klassifizierende Abbildung $M \rightarrow BG$, BÄ durch Homotopie

↪ glatte Struktur auf BG und Glätten von Homotopien

BG hat i.A. **keine** glatte Struktur, nur in Ausnahmefällen, z.B. falls $\dim(G) < \infty$ oder $G = \text{Diff}(N)$. Deshalb ist dieser Zugang i.A. nicht möglich!

Antwort (neu)

Ja, auch falls $\dim(G) = \infty$: HFB und BÄ gegeben durch *gruppenwertige* Abbildungen, die man besser glätten kann.

Hauptwerkzeug

G lokalkonvexe Lie-Gruppe

M parakompakte MFK,
 $\dim(M) < \infty$

Satz

$A \subseteq M$ abgeschlossen,

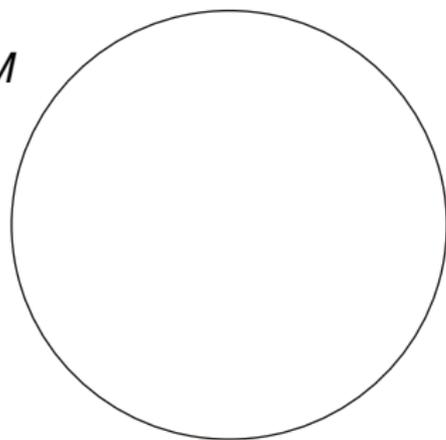
$U \subseteq M$ offen, $f : M \rightarrow G$

stetig, glatt auf $A \setminus U$

$\Rightarrow \exists \tilde{f} : M \rightarrow G$ stetig, glatt
auf A und $f = \tilde{f}$ auf $M \setminus U$

+ Kontrolle auf kompakten
Mengen

M



Hauptwerkzeug

G lokalkonvexe Lie-Gruppe

M parakompakte MFK,
 $\dim(M) < \infty$

Satz

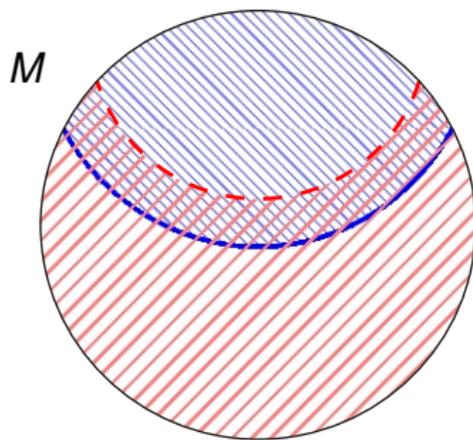
$A \subseteq M$ abgeschlossen,

$U \subseteq M$ offen, $f : M \rightarrow G$

stetig, glatt auf $A \setminus U$

$\Rightarrow \exists \tilde{f} : M \rightarrow G$ stetig, glatt
 auf A und $f = \tilde{f}$ auf $M \setminus U$

+ Kontrolle auf kompakten
 Mengen



Hauptwerkzeug

G lokalkonvexe Lie-Gruppe

M parakompakte MFK,
 $\dim(M) < \infty$

Satz

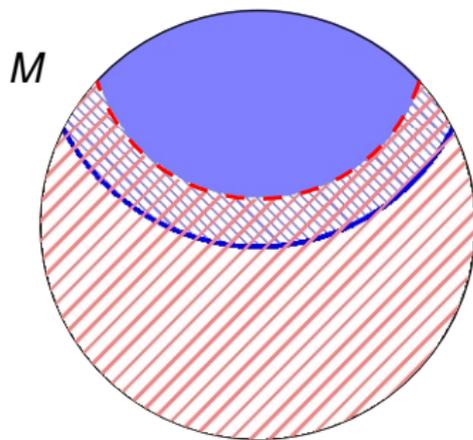
$A \subseteq M$ abgeschlossen,

$U \subseteq M$ offen, $f : M \rightarrow G$

stetig, glatt auf $A \setminus U$

$\Rightarrow \exists \tilde{f} : M \rightarrow G$ stetig, glatt
 auf A und $f = \tilde{f}$ auf $M \setminus U$

+ Kontrolle auf kompakten
 Mengen



Glätten von stetigen Bündeläquivalenzen

Gegeben: *glatte* HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

$$\mathcal{H} = (h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

(also alle g_{ij} , h_{ij} *glatt*) und *stetige* BÄ

$$\mathcal{F} = (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$$

(also alle f_i *stetig* mit $h_{ij} = f_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot f_j$)

Gesucht: glatte Abbildungen $\tilde{f}_i : U_i \rightarrow G$ mit $h_{ij} = \tilde{f}_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot \tilde{f}_j$

Problem: beim Glätten muss $h_{ij} = \tilde{f}_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot \tilde{f}_j$ erfüllt werden!

Glätten von stetigen Bündeläquivalenzen

Gegeben: *glatte* HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

$$\mathcal{H} = (h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

(also alle g_{ij} , h_{ij} glatt) und *stetige* BÄ

$$\mathcal{F} = (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$$

(also alle f_i stetig mit $h_{ij} = f_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot f_j$)

Gesucht: glatte Abbildungen $\tilde{f}_i : U_i \rightarrow G$ mit $h_{ij} = \tilde{f}_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot \tilde{f}_j$

Problem: beim Glätten muss $h_{ij} = \tilde{f}_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot \tilde{f}_j$ erfüllt werden!

Glätten von stetigen Bündeläquivalenzen

Gegeben: *glatte* HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

$$\mathcal{H} = (h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

(also alle g_{ij} , h_{ij} glatt) und *stetige* BÄ

$$\mathcal{F} = (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$$

(also alle f_i stetig mit $h_{ij} = f_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot f_j$)

Gesucht: glatte Abbildungen $\tilde{f}_i : U_i \rightarrow G$ mit $h_{ij} = \tilde{f}_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot \tilde{f}_j$

Problem: beim Glätten muss $h_{ij} = \tilde{f}_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot \tilde{f}_j$ erfüllt werden!

Die Induktionsidee

Idee

$$\text{Auf } U_i \cap U_j: \quad h_{ij} = \tilde{f}_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot \tilde{f}_j \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{f}_i = g_{ij} \cdot \tilde{f}_j \cdot h_{ji}$$

⇒ Benutze $\tilde{f}_i = g_{ij} \cdot \tilde{f}_j \cdot h_{ji}$, um \tilde{f}_i für $i = 1, 2, \dots$ induktiv zu definieren.

Beschreibung der Induktion

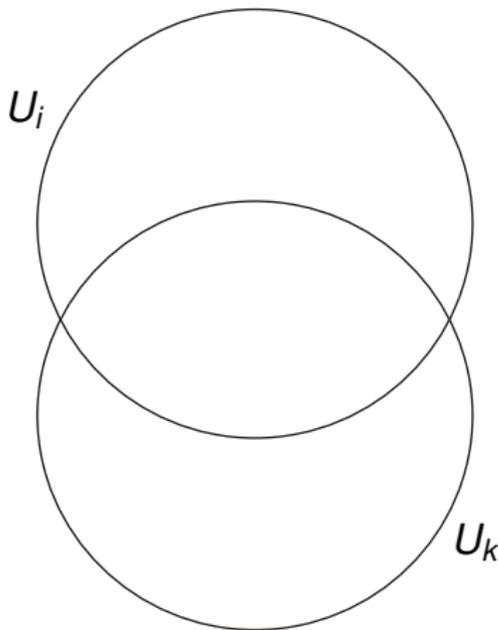
Sei \tilde{f}_i für $i < k$ definiert.

Dann wird \tilde{f}_k

- auf $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$ durch
$$\tilde{f}_k := g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$$
definiert,
- “nahe” ∂U_i auf f_k abgeändert,
- durch f_k auf $U_k \setminus \bigcup_{i < k} U_i$ fortgesetzt
- und schließlich geglättet.

Problem

Dabei wird $\tilde{f}_k = g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$
“nahe” ∂U_i verletzt!

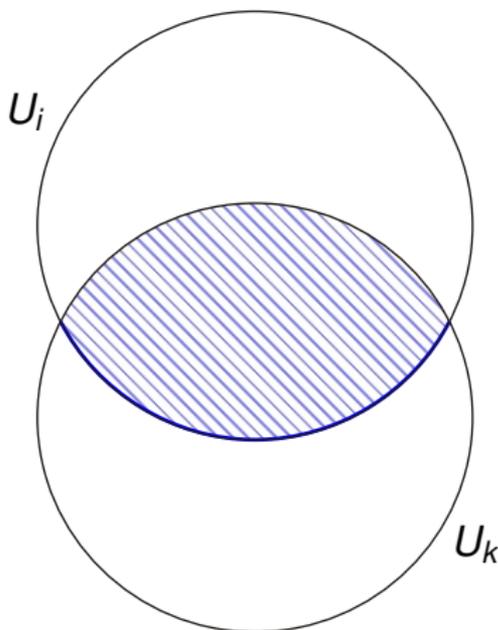


Beschreibung der Induktion

Sei \tilde{f}_i für $i < k$ definiert.

Dann wird \tilde{f}_k

- auf $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$ durch
$$\tilde{f}_k := g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$$
definiert,
- "nahe" ∂U_i auf f_k abgeändert,
- durch f_k auf $U_k \setminus \bigcup_{i < k} U_i$ fortgesetzt
- und schließlich geglättet.



Problem

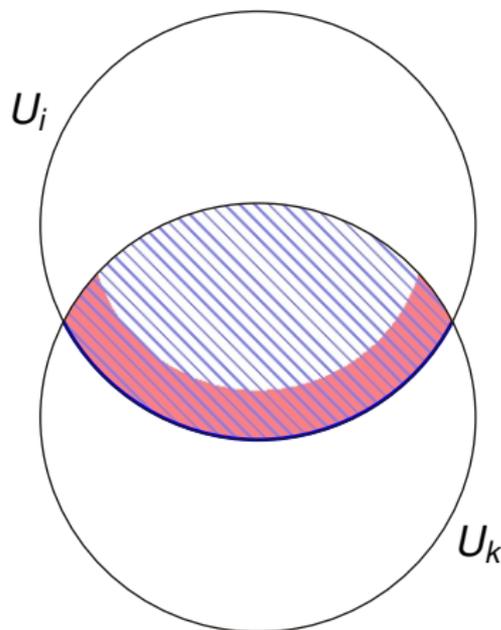
Dabei wird $\tilde{f}_k = g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$
"nahe" ∂U_i verletzt!

Beschreibung der Induktion

Sei \tilde{f}_i für $i < k$ definiert.

Dann wird \tilde{f}_k

- auf $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$ durch
$$\tilde{f}_k := g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$$
definiert,
- “nahe” ∂U_i auf f_k abgeändert,
- durch f_k auf $U_k \setminus \bigcup_{i < k} U_i$ fortgesetzt
- und schließlich geglättet.



Problem

Dabei wird $\tilde{f}_k = g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$
“nahe” ∂U_i verletzt!

Beschreibung der Induktion

Sei \tilde{f}_i für $i < k$ definiert.

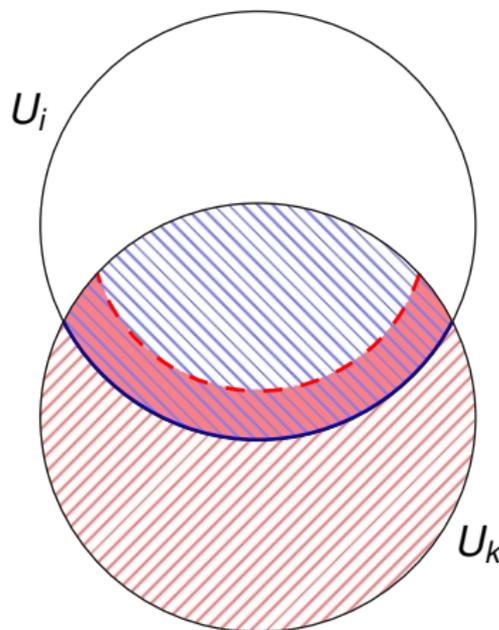
Dann wird \tilde{f}_k

- auf $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$ durch

$$\tilde{f}_k := g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$$

definiert,

- “nahe” ∂U_i auf f_k abgeändert,
- durch f_k auf $U_k \setminus \bigcup_{i < k} U_i$ fortgesetzt
- und schließlich geglättet.



Problem

Dabei wird $\tilde{f}_k = g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$
 “nahe” ∂U_i verletzt!

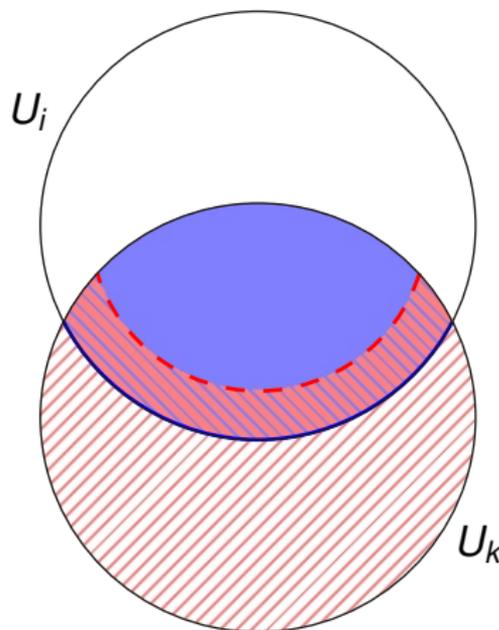
Beschreibung der Induktion

Sei \tilde{f}_i für $i < k$ definiert.

Dann wird \tilde{f}_k

- auf $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$ durch

$$\tilde{f}_k := g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$$
 definiert,
- “nahe” ∂U_i auf f_k
 abgeändert,
- durch f_k auf $U_k \setminus \bigcup_{i < k} U_i$
 fortgesetzt
- und schließlich geglättet.



Problem

Dabei wird $\tilde{f}_k = g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$
 “nahe” ∂U_i verletzt!

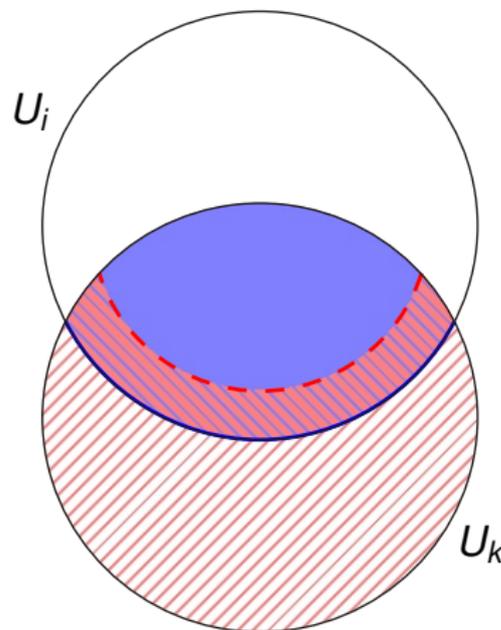
Beschreibung der Induktion

Sei \tilde{f}_i für $i < k$ definiert.

Dann wird \tilde{f}_k

- auf $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$ durch

$$\tilde{f}_k := g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$$
 definiert,
- “nahe” ∂U_i auf f_k
 abgeändert,
- durch f_k auf $U_k \setminus \bigcup_{i < k} U_i$
 fortgesetzt
- und schließlich geglättet.



Problem

Dabei wird $\tilde{f}_k = g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$
 “nahe” ∂U_i verletzt!

Der Sicherheitsabstand

Lösung

“Sperre” den Bereich, in dem $\tilde{f}_k = g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$ nicht gilt in einen “Sicherheitsabstand” ein, der “nahe” ∂U_i ist.

Beobachtung

$(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ offene Überdeckung von M , $V_i \subseteq U_i$ und $\tilde{f}'_i : V_i \rightarrow G$ glatt mit $\tilde{f}'_i = g_{ij} \cdot \tilde{f}'_j \cdot h_{ji}$ auf $V_i \cap V_j$

$$\Rightarrow \tilde{f}'_k(x) := g_{ki}(x) \cdot \tilde{f}'_i(x) \cdot h_{ik}(x) \text{ für } x \in U_k \cap V_i$$

definiert *glatte* BÄ

BÄ durch Werte auf feinerer Überdeckung eindeutig bestimmt!

Der Sicherheitsabstand

Lösung

“Sperre” den Bereich, in dem $\tilde{f}_k = g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$ nicht gilt in einen “Sicherheitsabstand” ein, der “nahe” ∂U_i ist.

Beobachtung

$(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ offene Überdeckung von M , $V_i \subseteq U_i$ und $\tilde{f}'_i : V_i \rightarrow G$ glatt mit $\tilde{f}'_i = g_{ij} \cdot \tilde{f}'_j \cdot h_{ji}$ auf $V_i \cap V_j$

$$\Rightarrow \tilde{f}'_k(x) := g_{ki}(x) \cdot \tilde{f}'_i(x) \cdot h_{ik}(x) \text{ für } x \in U_k \cap V_i$$

definiert *glatte* BÄ

BÄ durch Werte auf feinerer Überdeckung eindeutig bestimmt!

Der Sicherheitsabstand

Lösung

“Sperre” den Bereich, in dem $\tilde{f}_k = g_{ki} \cdot \tilde{f}_i \cdot h_{ik}$ nicht gilt in einen “Sicherheitsabstand” ein, der “nahe” ∂U_i ist.

Beobachtung

$(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ offene Überdeckung von M , $V_i \subseteq U_i$ und $\tilde{f}'_i : V_i \rightarrow G$ glatt mit $\tilde{f}'_i = g_{ij} \cdot \tilde{f}'_j \cdot h_{ji}$ auf $V_i \cap V_j$

$$\Rightarrow \tilde{f}'_k(x) := g_{ki}(x) \cdot \tilde{f}'_i(x) \cdot h_{ik}(x) \text{ für } x \in U_k \cap V_i$$

definiert *glatte* BÄ

BÄ durch Werte auf feinerer Überdeckung eindeutig bestimmt!

Technische Schwierigkeiten

Frage

Wo sind die Schwierigkeiten in der Konstruktion?

- Bedingung $\tilde{f}_i = g_{ij} \cdot \tilde{f}_j \cdot h_{ji}$
- Fortsetzung von $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$ nach U_k

Lösung

- *Sicherheitsabstand*
- *blende \tilde{f}_k (auf $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$) nach f_k (auf $U_k \setminus \bigcup_{i < k} U_i$) über*
 - *durch **Konvexkombination** von $\tilde{f}_k \cdot f_k^{-1}$ auf $\mathbb{1}$ (G ist **lokalkonvex**)*
 - *Kontrolle auf kompakten Mengen beim Glätten $\rightsquigarrow \tilde{f}_k \cdot f_k^{-1}$ hat Werte in fester "konvexer" $\mathbb{1}$ -Umgebung*

Technische Schwierigkeiten

Frage

Wo sind die Schwierigkeiten in der Konstruktion?

- Bedingung $\tilde{f}_i = g_{ij} \cdot \tilde{f}_j \cdot h_{ji}$
- Fortsetzung von $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$ nach U_k

Lösung

- *Sicherheitsabstand*
- *blende \tilde{f}_k (auf $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$) nach f_k (auf $U_k \setminus \bigcup_{i < k} U_i$) über*
 - *durch **Konvexkombination** von $\tilde{f}_k \cdot f_k^{-1}$ auf $\mathbb{1}$ (G ist **lokalkonvex**)*
 - *Kontrolle auf kompakten Mengen beim Glätten $\rightsquigarrow \tilde{f}_k \cdot f_k^{-1}$ hat Werte in fester "konvexer" $\mathbb{1}$ -Umgebung*

Technische Schwierigkeiten

Frage

Wo sind die Schwierigkeiten in der Konstruktion?

- Bedingung $\tilde{f}_i = g_{ij} \cdot \tilde{f}_j \cdot h_{ji}$
- Fortsetzung von $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$ nach U_k

Lösung

- *Sicherheitsabstand*
- *blende \tilde{f}_k (auf $U_k \cap \bigcup_{i < k} U_i$) nach f_k (auf $U_k \setminus \bigcup_{i < k} U_i$) über*
 - *durch **Konvexkombination** von $\tilde{f}_k \cdot f_k^{-1}$ auf $\mathbb{1}$ (G ist **lokalkonvex**)*
 - *Kontrolle auf kompakten Mengen beim Glätten $\rightsquigarrow \tilde{f}_k \cdot f_k^{-1}$ hat Werte in fester "konvexer" $\mathbb{1}$ -Umgebung*

Nur **elementare Topologie** verwendet!

Glätten von Hauptfaserbündeln

Gegeben: *stetiges* HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

Gesucht: *glattes* HFB

$$\mathcal{H} = (h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

(also $h_{ij} \cdot h_{jk} \cdot h_{ki} = \mathbb{1}$) und stetige BÄ

$$\mathcal{F} = (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$$

(also $h_{ij} = f_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot f_j$)

$$\Rightarrow h_{ki} = h_{kj} \cdot h_{ji}$$

↪ gleiche induktive Konstruktion mit geeigneter Ordnung auf
Tupeln $(k, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Glätten von Hauptfaserbündeln

Gegeben: *stetiges* HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

Gesucht: *glattes* HFB

$$\mathcal{H} = (h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

(also $h_{ij} \cdot h_{jk} \cdot h_{ki} = \mathbb{1}$) und stetige BÄ

$$\mathcal{F} = (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$$

(also $h_{ij} = f_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot f_j$)

$$\Rightarrow h_{ki} = h_{kj} \cdot h_{ji}$$

↪ gleiche induktive Konstruktion mit geeigneter Ordnung auf
Tupeln $(k, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Glätten von Hauptfaserbündeln

Gegeben: *stetiges* HFB

$$\mathcal{G} = (g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

Gesucht: *glattes* HFB

$$\mathcal{H} = (h_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G)_{i,j \in \mathbb{N}}$$

(also $h_{ij} \cdot h_{jk} \cdot h_{ki} = \mathbb{1}$) und stetige BÄ

$$\mathcal{F} = (f_i : U_i \rightarrow G)_{i \in \mathbb{N}}$$

(also $h_{ij} = f_i^{-1} \cdot g_{ij} \cdot f_j$)

$$\Rightarrow h_{ki} = h_{kj} \cdot h_{ji}$$

↪ gleiche induktive Konstruktion mit geeigneter Ordnung auf Tupeln $(k, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Resultat

Theorem

G lokalkonvexe Lie-Gruppe, M endlichdim. parakompakte MFK

- *Zu jedem stetigen HFB existiert ein äquivalentes glattes HFB.*
- *Zwei glatte HFB sind genau dann glatt äquivalent, wenn sie stetig äquivalent sind.*

- Beweis durch **elementare** topologische Methoden
- Beweis **ohne klassifizierende Räume**
- **relative Version** des Theorems “for free”
- Anwendung:
 - Nicht-abelsche Kohomologie
 - Getwistete K -Theorie ($PU(H)$ -Bündel)

Resultat

Theorem

G lokalkonvexe Lie-Gruppe, M endlichdim. parakompakte MFK

- *Zu jedem stetigen HFB existiert ein äquivalentes glattes HFB.*
- *Zwei glatte HFB sind genau dann glatt äquivalent, wenn sie stetig äquivalent sind.*

- Beweis durch **elementare** topologische Methoden
- Beweis **ohne klassifizierende Räume**
- **relative Version** des Theorems “for free”
- Anwendung:
 - Nicht-abelsche Kohomologie
 - Getwistete K -Theorie ($PU(H)$ -Bündel)

Resultat

Theorem

G lokalkonvexe Lie-Gruppe, M endlichdim. parakompakte MFK

- *Zu jedem stetigen HFB existiert ein äquivalentes glattes HFB.*
- *Zwei glatte HFB sind genau dann glatt äquivalent, wenn sie stetig äquivalent sind.*

- Beweis durch **elementare** topologische Methoden
- Beweis **ohne klassifizierende Räume**
- **relative Version** des Theorems “for free”
- Anwendung:
 - Nicht-abelsche Kohomologie
 - Getwistete K -Theorie ($PU(H)$ -Bündel)

Zusammenfassung

- Hauptfaserbündel und Bündeläquivalenzen durch **gruppenwertige Abbildungen** \rightsquigarrow Stetigkeit/Glattheit
- Verträglichkeitsbedingungen durch **induktive Konstruktion** glatter Abbildungen erfüllt \rightsquigarrow Glätten von BÄ und HFB



C. Müller, C. Wockel

Equivalences of Smooth and Continuous Principal Bundles
with Infinite-Dimensional Structure Group

arXiv: math.DG/0604142,

christoph@wockel.eu

Zusammenfassung

- Hauptfaserbündel und Bündeläquivalenzen durch **gruppenwertige Abbildungen** \rightsquigarrow Stetigkeit/Glattheit
- Verträglichkeitsbedingungen durch **induktive Konstruktion** glatter Abbildungen erfüllt \rightsquigarrow Glätten von BÄ und HFB



C. Müller, C. Wockel

Equivalences of Smooth and Continuous Principal Bundles
with Infinite-Dimensional Structure Group

arXiv: math.DG/0604142,

christoph@wockel.eu

Zusammenfassung

- Hauptfaserbündel und Bündeläquivalenzen durch **gruppenwertige Abbildungen** \rightsquigarrow Stetigkeit/Glattheit
- Verträglichkeitsbedingungen durch **induktive Konstruktion** glatter Abbildungen erfüllt \rightsquigarrow Glätten von BÄ und HFB



C. Müller, C. Wockel

Equivalences of Smooth and Continuous Principal Bundles
with Infinite-Dimensional Structure Group

arXiv: math.DG/0604142,

christoph@wockel.eu