Übung zur Analysis 2, SS 2010

Übungsblatt zu Pfingsten – Lösungsskizzen

Aufgabe P1 (1P pro Unterpunkt)
Integration:

1. Nein. Z.B. gibt die konstante Funktion $f(x) = 1$ ein Gegenbeispiel.
2. Ja. Die konstante Funktion 1 ist in $\mathcal{R}$, und Summen und Produkte sind in $\mathcal{R}$ nach Satz R:6.12 und R:6.13.
3. Nein. Z.B. gilt für $[a, b] = [-1, 1]$ und $g(x) = |x|$, dass $G'(x) = |x|$, und somit ist $G(x)$ in 0 nicht zweimal differenzierbar.

Gleichmäßige Konvergenz:

1. Ja. Für $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$ und $B_n = \sum_{k=1}^{n} A_n$ folgt aus Satz R:7.11, dass $\lim_{t\to x} \lim_{n\to\infty} s_n(t) = \lim_{n\to\infty} B_n$.
2. Ja. Das Cauchy-Kriterium aus Satz R:7.8 lautet für Reihen: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein N, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt $|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $m = n = N$ erhält man: $|f_N(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Also konvergiert $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen 0.

Fourierreihen:

1. Nein. Zwar gilt die erste Gleichung, da das Integral additiv ist (Theorem R:6.12), die zweite Gleichung gilt aber nicht. Z.B. ist für $f(x) = \max\{0, x\}$ und $g(x) = \min\{0, x\}$ $fg \equiv 0$ und somit $c_n(fg) = 0$. Aber $c_1(f) \neq 0$ und $c_1(g) \neq 0$.
2. Ja. f ist dann insbesondere stetig differenzierbar und eine solche Funktion erfüllt die Voraussetzungen von Theorem R:8.14.

Aufgabe P2

1. [2P] Es gilt
$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| |x| \xrightarrow{n\to\infty} |x|,$$
also konvergiert die Reihe falls $|x| < 1$ nach dem Quotientenkriterium.

2. [3P] Der erste Teil zeigt $1 \leq R$, wobei R der Konvergenzradius der Potenzreihe ist. Damit folgt aus Theorem R:7.17 dass f beliebig oft differenzierbar, also insbesondere auch stetig differenzierbar ist. Die Ableitung ist dann gegeben durch

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} (n+1) x^n \ .$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \alpha f(x) - x f'(x) &= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} (\alpha - (n+1) - 1) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+1} (n+1) x^n \end{aligned}$$

und daraus folgt $f'(x) = \frac{\alpha}{1+x} f(x)$.

3. [3P] Die Funktion $g(x) = (1+x)^\alpha$ erfüllt ebenfalls die Gleichung $g'(x) = \frac{\alpha}{1+x} g(x)$. Dann gilt für die Funktion f/g

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{\alpha}{1+x} \frac{fg - gf}{g^2} = 0,$$

also nach dem Hauptsatz $f(x) = g(x) \cdot c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Da $f(0) = g(0) = 1$ ist $c = 1$.

Zusatzaufgabe: Für fixes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $F(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$ falls $|t^2 - 2tx| < 1$. Da die Funktion $g(t) = t^2 - 2xt$ stetig ist und $g(0) = 0$ gilt ist dies für $t \in \,]-\delta_x, \delta_x[$ und ein $\delta_x > 0$ erfüllt. Für $|t| < \delta_x$ gilt also

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) t^n$$

mit $n! p_n(x) = g_x^{(n)}(0)$, wenn wir $g_x(t) = (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$ für fixes $x \in \mathbb{R}$ setzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} g_x(t) &= (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow 1 = p_0(x) \\ g_x'(t) &= -\frac{1}{2}(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x + 2t) \Rightarrow x = p_1(x) \\ g_x''(t) &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{5}{2}}(-2x + 2t)^2 + (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{3}{2}}(2)\right) \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}4x^2 + 2\right) = 3x^2 - 1 = 2p_2(x). \end{aligned}$$

Aufgabe P3

1. [2P] Da $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$ mit Konvergenzradius 1, gilt $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1/(1-x) - 1 = x/(1-x)$, ebenfalls mit Konvergenzradius 1.

2. [3P] Für $|x| < 1$ gilt

$$|\log(1+x)| = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n\Big| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|x|^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n = \frac{|x|}{1-|x|} \ .$$

   Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ ist ferner $|x|/(1-|x|) \leq 2|x|$.

3. [3P] Da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, bilden die a_n eine Nullfolge. Somit gibt es ein $M > 0$, so dass $|a_m| \leq \frac{1}{2}$ für alle $m \geq M$. Für $N > M$ schreibe

$$p_N = q_N \prod_{n=1}^{M-1} (1+a_n) \quad \text{und} \quad q_N = \prod_{n=M}^{N} (1+a_n) \ .$$

   Es genügt, zu zeigen, dass q_N konvergiert. Sei

$$t_N = \log(q_N) = \sum_{n=M}^{N} \log(1+a_n) \ .$$

   Mit Teil 2 gilt $|\log(1+a_n)| \leq 2|a_n|$, und da die Reihe $\sum_{n=M}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die Reihe $\sum_{n=M}^{\infty} \log(1+a_n)$. Also existiert der Grenzwert $\lim_{N\to\infty} t_N$.

   Es bleibt zu zeigen, dass auch $\lim_{N\to\infty} q_N$ existiert. Die Exponentialfunktion ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Daher gilt

$$\exp(\lim_{N\to\infty} t_N) = \lim_{N\to\infty} \exp(t_N) = \lim_{N\to\infty} q_N \ ,$$

   und insbesondere existiert der Grenzwert.

4. [1P] Setze $a_n = -q^n$ in Teil 3. Dann $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |q|^n$, und die Reihe konvergiert, da $|q| < 1$ und die geometrische Reihe Konvergenzradius 1 hat.