Übung zur Analysis 2, SS 2010

Letztes Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 122

1. Nein: $f(x) = x$ ist ein Gegenbeispiel.
2. (a) Ja: Nach Satz R:7.12, da alle p_n stetig sind.

   (b) Nein: z.B. ist die Einschränkung von exp auf $[0,1]$ der gleichmäßige Grenzwert von $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Da exp aber beliebig hohe nicht-verschwindende Ableitungen hat ist es kein Polynom.
3. Ja: Falls $|x| < R$, so gilt
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^{n+1}| = |x| \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| < \infty.$$
4. Nein: Ein Gegenbeispiel hierfür ist z.B.
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$
   Dann existieren $D_1 f(0,0) = D_2 f(0,0) = 0$, aber f in unstetig in $(0,0)$.
5. Ja, eine Lösung der DGL erfülle $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) > 0$ und somit ist φ nach Satz 6.2.5. injektiv.

Aufgabe 123

1. [2P] Es gilt
$$\begin{aligned} \varphi_1'(x) &= -e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x) \\ \varphi_1''(x) &= e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x) \end{aligned}$$
   und somit $\varphi_1''(x) + 2\varphi_1'(x) + 2\varphi_1(x) = 0$ (analog rechnet man $\varphi_2''(x) + 2\varphi_2'(x) + 2\varphi_2(x) = 0$ nach).
2. [1P] Da φ_1 und φ_2 die DGL erfüllen gilt
$$\begin{aligned} &(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)'' + 2(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)' + 2(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \\ &\qquad (\varphi_1'' + 2\varphi_1' + 2\varphi_1) + (\varphi_2'' + 2\varphi_2' + 2\varphi_2) = 0 \end{aligned}$$
   Also erfüllt auch $(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)$ die DGL.

3. [2P] Wir suchen nach einer Lösung $\varphi(x)$, die $\varphi(0) = 1$ und $\varphi'(0) = 1$ erfüllt. Aus Teil 1. und 2. wissen wir, dass

$$\lambda_1(e^{-x}\sin(x)) + \lambda_2(e^{-x}\cos(x)) \tag{1}$$

für jedes λ_1, λ_2 ein Lösung ist. Wir versuchen nun für geeignete Wahlen von λ_1 und λ_2 die Gleichungen $\varphi(0) = 1$ und $\varphi'(0) = 1$ zu erfüllen. Falls $\varphi(0) = 1$ gelten soll, so muss $\lambda_2 = 1$ sein. Soll $\varphi'(0) = 1$ gelten, so muss $\lambda_1 = 2$ gelten. Also ist

$$\varphi(x) = e^{-x}(2\sin(x) + \cos(x))$$

die (sogar eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 124

1. [2P] Da $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$ existiert

$$\int_0^c \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int_1^{c+1} \frac{1}{u^2+1}\,du = \arctan(c+1) - \arctan(1)$$

(Substitution: $u = x + 1$) für alle $c > 0$. Da $\lim_{c\to\infty} \arctan(c+1) = \frac{\pi}{2}$ konvergiert das Integral. Mit $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ erhält man

$$\int_0^c \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

2. [3P] Da $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ für $x \to 0$ nicht konvergiert müssen wir die beiden (einseitigen) uneigentlichen Integrale

$$\int_0^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

betrachten. Die Substitution $u = \sqrt{x}$ ergibt

$$\int_c^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\sqrt{c}}^1 \frac{e^{-u}}{u} u\,du = -2(e^{-1} - e^{-\sqrt{c}})$$

für $c \in]0,1[$. Für $c \to 0$ konvergiert dieses Integral also gegen $2 - 2/e$. Die gleiche Substitution ergibt

$$\int_1^c \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{c}} \frac{e^{-u}}{u} u\,du = -2(e^{-\sqrt{c}} - e^{-1})$$

für $c > 0$. Für $c \to \infty$ konvergiert dieses Integral also gegen 2/e. Insgesamt konvergiert

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

also gegen 2.

Aufgabe 125

Für $x < 1$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} = 1$ (geometrische Reihe, [1P]). Für $x = 1$ erhalten wir $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n \cdot (1-1) = 0$ [1P]. Die Reihe konvergiert demnach punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x < 1, \\ 0 & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Die Konvergenz kann nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion unstetig ist [2P].

Aufgabe 126

Es genügt den Fall $p(x,y) = M$ zu betrachten: Nehmen wir an, dass $n(x,y) = Ax^\alpha y^\beta$ für ein (x,y) mit $P(x,y) = px + qy < M$ maximal wird, so ergibt sich ein Widerspruch wie folgt. Da $px + qy < M$ existiert ein Paar (x', y') mit $px' + qy' < M$ und $x' > x$, $y' > y$ (weil $M, p, q > 0$). Also gilt $n(x', y') = Ax'^\alpha y'^\beta > Ax^\alpha y^\beta = n(x,y)$ da $A > 0$ und auf Grund der Monotonie der Funktionen $z \mapsto z^\alpha$ und $z \mapsto z^\beta$ [1P].
Wir suchen also nach den Extrema von n unter der Nebenbedingung $P(x,y) - M = 0$. Da $dP(x,y) = (p,q)$ für alle $x, y > 0$ eine surjektive lineare Abbildung ist müssen wir nach dem Satz ueber die Lagrange-Multiplikatoren die Paare (x_0, y_0) finden, für die ein λ mit $dn(x_0, y_0) = \lambda\, dP(x_0, y_0)$ existiert. Also muss

$$(A\alpha x_0^{\alpha-1} y_0^\beta, A\beta x_0^\alpha y_0^{\beta-1}) = \lambda(p,q)$$

gelten, was

$$\lambda = \frac{A\alpha x_0^{\alpha-1} y_0^\beta}{p} = \frac{A\beta x_0^\alpha y_0^{\beta-1}}{q}$$

impliziert. Die impliziert wiederum $q\alpha y_0 = p\beta x_0$, also $\frac{x_0}{y_0} = \frac{q\alpha}{p\beta}$. Da gleichzeitig $px_0 + qy_0 = M$ gelten muss ist dies nur für $x_0 = \frac{\alpha M}{p(\alpha+\beta)}$ und $y_0 = \frac{\beta M}{q(\alpha+\beta)}$ der Fall [2P].
Da die stetige Funktion n auf der kompakten (Skizze!) Menge

$$\{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ P(x,y) = M\}$$

ein Maximum annimmt und dies nicht für $x = 0$ oder $y = 0$ angenommen werden kann, folgt hieraus dass n auf der Menge

$$\{(x,y) : x > 0,\ y > 0,\ P(x,y) = M\}$$

ein Maximum annimmt. Nach der obigen Rechnung muss dieses im Punk

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\alpha M}{p(\alpha+\beta)}, \frac{\beta M}{q(\alpha+\beta)} \right)$$

angenommen werden [1P].