Übung zur Analysis 2, SS 2010

12. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 118

1. Dies ist eine homogene lineare DGL, sowie auch von der Form $y' = f(x)g(y)$ mit $g(y) > 0$ im Definitionsbereich. Also sind a) und b) anwendbar. Und natürlich auch c) (mit 0 als inhomogenen Term), aber man macht sich dann unnötig Arbeit. (Jede Antwort a), b), c) mit korrekter Begründung wird als richtig gewertet).
2. Dies ist eine inhomogene lineare DGL, es ist nur c) anwendbar.
3. Diese DGL kann man als $y' = f(x)g(y)$ schreiben mit $f(x) = x + 1$ und $g(y) = 1/y + 1$. Da $y > 0$ ist $g(y) > 0$ und Methode a) ist anwendbar.
4. Ja. Zu $y \in \mathbb{R}^n$ gibt es ein $r > 0$ und ein $L > 0$, so dass $|y' - y| < r \Rightarrow |F_x(y) - F_x(y')| \leq L|y - y'|$. Für $\varepsilon > 0$ wähle $0 < \delta < \varepsilon/L$.
5. Nein. Z.B. $n = 1$ und $f(x, y) = |y|$ genügt (sogar global) einer Lipschitz-Bedingung bezüglich y mit $L = 1$, ist aber in 0 nicht differenzierbar.

Aufgabe 119

1. [2P] Wie verwenden Variation der Konstanten. Es ist $\varphi_0(x) = \exp(\int_{x_0}^x a dt) = e^{(x-x_0)a}$, und wir müssen

$$\int_{x_0}^{x} \varphi_0(t)^{-1} b dt = b \int_{x_0}^{x} e^{-(t-x_0)a} dt$$

bestimmen. Wir unterscheiden $a = 0$ und $a \neq 0$. Für $a = 0$ erhalten wir

$$\int_{x_0}^{x} \varphi_0(t)^{-1} b dt = b \int_{x_0}^{x} dt = b(x - x_0)$$

und damit

$$\varphi(x) = \varphi_0(x)(c + \int_{x_0}^{x} \varphi_0(t)^{-1} b dt) = c + b(x - x_0)\ .$$

Für $a \neq 0$ erhalten wir

$$\int_{x_0}^{x} \varphi_0(t)^{-1} b dt = \frac{b}{-a} e^{ax_0}(e^{-ax} - e^{-ax_0}) = \frac{b}{a}(1 - e^{-a(x-x_0)})$$

also

$$\varphi(x) = \left(c + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}\ .$$

2. [2P] $a = 0$: Die Lösung erfüllt $\varphi(x_0) = c$ und $\varphi'(x) = b$.

   $a \neq 0$: Die Lösung erfüllt $\varphi(x_0) = c$ und $\varphi'(x) = \left(c + \frac{b}{a}\right) e^{a(x-x_0)} a = a\varphi(x) + b$.

3. ([2P] Lösung + [1P] maximales p) Wir verwenden Separation der Variablen. Es ist $y' = f(x)g(y)$ mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(y) = \exp(y) > 0$. Dann ist
$$G(y) = \int_0^y \frac{1}{g(t)} dt = \int_0^y e^{-t} dt = -e^{-y} + 1$$
   und
$$F(x) = \int_0^x \sin(t) dt = -\cos(x) + 1 \ .$$
   Es gilt $G(\mathbb{R}) =]-\infty, 1[$. Ferner gilt $F(x) < 1$ für $\cos(x) > 0$. Damit dies für alle $x \in]-p, p[$ gilt, muss $p \leq \pi/2$ erfüllt sein. Die Lösung ist durch $G(\varphi(x)) = F(x)$ bestimmt, also durch
$$-\exp(-\varphi(x)) + 1 = -\cos(x) + 1 \ \Leftrightarrow \ \varphi(x) = \log(1/\cos(x)) \ .$$
   Diese Lösung existiert zumindest auf $]-p, p[$ mit $p = \pi/2$. Angenommen, die Lösung würde auf einem größeren Intervall existieren und angenommen, $\pi/2$ liegt in dem größeren Intervall. Dann muss die Lösung in $\pi/2$ stetig sein. Aber $\lim_{x \nearrow \pi/2} \log(1/\cos(x))$ existiert nicht. (Genauso kann man $-\pi/2$ ausschließen.) Also ist $p = \pi/2$ der größtmögliche Wert von p.

4. [1P] Es gilt in der Tat $\varphi(0) = 0$ und $\varphi'(x) = \cos(x)(-\cos(x)^{-2})(-\sin(x)) = \sin(x)/\cos(x) = \sin(x)\exp(\varphi(x))$.

Aufgabe 120 (Bernoullische Differentialgleichung)

Gilt Gleichung (2) für ψ, so folgt mit der Kettenregel
$$(1-\alpha)\varphi(x)^{-\alpha}\varphi'(x) = (1-\alpha)f(x)\varphi(x)^{1-\alpha} + (1-\alpha)g(x) \ .$$
Da $\varphi(x) > 0$ und $\alpha \neq 1$ können wir mit $\varphi(x)^\alpha/(1-\alpha)$ multiplizieren, also $\varphi'(x) = f(x)\varphi(x) + g(x)\varphi(x)^\alpha$, und somit löst $\varphi(x)$ Gleichung (1).
Gilt umgekehrt Gleichung (1), so setzen wir $\varphi(x) = \psi(x)^{1/(1-\alpha)}$ ein und erhalten
$$\frac{1}{1-\alpha}\psi(x)^{\alpha/(1-\alpha)}\psi'(x) = f(x)\psi(x)^{1/(1-\alpha)} + g(x)\psi(x)^{\alpha/(1-\alpha)} \ .$$
Wir multiplizieren beide Seiten mit $(1-\alpha)\psi(x)^{-\alpha/(1-\alpha)}$ und sehen, dass $\psi(x)$ Gleichung (2) löst.

Aufgabe 121

1. ([3P] Lösung + [1P] Probe) Wir verwenden Aufgaba 120 mit $\alpha = 2$, $f(x) = x$ und $g(x) = -e^{-x^2/2}$. Demnach müssen wir ein $\psi(x)$ finden, dass die Gleichung
$$y' = -xy + e^{x^2/2}$$
mit der Anfangsbedingung $\psi(0) = \varphi(0)^{1/(1-\alpha)} = 1/2$ löst. Dies ist eine inhomogene linear Differentialgleichung. Also
$$\psi_0(x) = \exp(\int_0^x (-t)dt) = \exp(-x^2/2)$$
und
$$\psi(x) = \varphi_0(x)(1/2 + \int_0^x \psi_0(t)^{-1} e^{-t^2/2} dt) = \exp(-x^2/2)(1/2 + x)\ .$$
Damit gilt (wegen $\varphi(x) = 1/\psi(x)$)
$$\varphi(x) = \frac{2}{1+2x} \exp(x^2/2)\ .$$
In der Tat gilt $\varphi(0) = 2$ und
$$\varphi'(x) = \frac{-2}{(1+2x)^2} 2\exp(x^2/2) + \frac{2}{1+2x} x \exp(x^2/2)$$
sowie
$$x\varphi(x) - \exp(-x^2/2)\varphi(x)^2 = x\frac{2}{1+2x}\exp(x^2/2) - \frac{2^2}{(1+2x)^2}\exp(x^2)\exp(-x^2/2)\ .$$

2. [3P] Nach Aufgabe 120 müssen wir die Gleichung $y' = (1-\alpha)y + (1-\alpha)$ lösen. Die Anfangsbedingung lautet $\psi(0) = \varphi(0)^{1-\alpha} = c^{1-\alpha}$. Aus Aufgabe 119 kennen wir die allgemeine Lösung:
$$\psi(x) = (c^{1-\alpha} + 1)e^{(1-\alpha)x} - 1\ .$$
Die Bedingung $\psi(x) > 0$ ist genau dann erfüllt, wenn
$$(1-\alpha)x > -\log(c^{1-\alpha} + 1)$$
Sei $u = -(1-\alpha)^{-1}\log(c^{1-\alpha}+1)$. Damit muss gelten $x > u$ für $\alpha < 1$ und $x < u$ für $\alpha > 1$.
Die Lösung von $y' = y + y^\alpha$ mit Anfangsbedingung ist
$$\varphi(x) = \psi(x)^{1/(1-\alpha)} = \Big((c^{1-\alpha}+1)e^{(1-\alpha)x} - 1\Big)^{1/(1-\alpha)}\ ,$$
und sie ist zumindest auf dem Intervall
$$\alpha < 1\ :\ I =]u, \infty[\quad , \quad \alpha > 1\ :\ I =]-\infty, u[$$
definiert. Der einseitige Grenzwert von $\varphi(x)$ für $x \to u$ ist 0, somit gibt es kein φ, dass auf einem größeren Intervall definiert ist, und dessen Graph $\{(x, \varphi(x)) | x \in I\}$ im Definitionsbereich $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ liegt.