Übung zur Analysis 2, SS 2010

11. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 113

1. Nein: $df(x_0) = 0$ ist nur notwendig, nicht hinreichend (siehe z.B. $f(x) = x^3$ in $x_0 = 0$).

2. Ja: dies ist nach dem Satz über die Lagrange-Multiplikatoren der Fall.

3. Ja: $M = \varphi^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen (da Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Funktion) und beschränkt (nach Voraussetzung). Also ist M kompakt und da f insbesondere stetig ist nimmt f nach Satz 5.3.4. ein Maximum an.

4. Ja: ist (a, b) im Graph von φ so gilt $b = \varphi(a)$. Da φ eine Lösung ist gilt $\varphi'(a) = f(a, \varphi(a)) = f(a, b)$.

5. Nein: da $x \mapsto f(x, \phi(x)) = \varphi'(x)$ muss φ in jedem $x \in \mathbb{R}$ (sogar stetig) differenzierbar sein, was $x \mapsto |x|$ nicht ist.

6. Ja: es gilt $\varphi'(x) = 2xe^{x^2} = f(x, \varphi(x))$.

Aufgabe 114

Wir wissen aus Aufgabe 104, dass f auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar ist. $df(r, \alpha, \beta)$ ist genau dann umkehrbar, wenn die Jacobi-Determinante von f an der Stelle (r, α, β) ungleich Null ist [1P]. Man berechnet:

$$\begin{aligned}
\det df(r, \alpha, \beta) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -r\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & r\cos(\alpha)\cos(\beta) & -r\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & r\cos(\alpha)\sin(\beta) & r\sin(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \\
&= r^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)^2\cos(\beta)^2 + r^2\sin(\alpha)\sin(\alpha)^2\sin(\beta)^2 \\
&\quad + r^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)^2\sin(\beta)^2 + r^2\sin(\alpha)\sin(\alpha)^2\cos(\beta)^2 \\
&= r^2\sin(\alpha)
\end{aligned}$$

[1P]. Also gilt $\det df(r, \alpha, \beta) = 0$ genau dann, wenn $r = 0$ oder $\sin(\alpha) = 0$. Somit ist $df(r, \alpha, \beta)$ für alle

$$\{(r, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid r > 0 \text{ und } \alpha \notin \pi\mathbb{Z}\}$$

[1P] invertierbar.

Aufgabe 115

1. [3P] f und φ sind $\mathcal{C}^1$ auf E und
$$[d\varphi(x,y,z)] = \begin{pmatrix} 2x/a^2 & 2y/b^2 & 2z/c^2 \end{pmatrix} .$$
Also ist $d\varphi$ surjektiv für alle $(x,y,z) \in E$. Wir können den Satz über Lagrange Multiplikatoren anwenden. An Extrempunkten von f auf $M = \varphi^{-1}(\{0\}) \cap E$ muss gelten: $df(x,y,z) = \lambda d\varphi(x,y,z)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt
$$[df(x,y,z)] = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \end{pmatrix} .$$
Der erste Eintrag in $df(x,y,z) = \lambda d\varphi(x,y,z)$ gibt $\lambda = a^2yz/(2x)$, der zweite Eintrag ergibt damit $x^2/a^2 = y^2/b^2$ und der dritte Eintrag $x^2/a^2 = z^2/c^2$. Es folgt $x/a = y/b = z/c$. Aus $\varphi(x,y,z) = 0$ folgt weiter $3x^2/a^2 = 1$, also $x/a = 1/\sqrt{3}$. Insgesamt kann f auf $\varphi^{-1}(\{0\}) \cap E$ nur in
$$(x,y,z) = (a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$$
ein Extremum haben.

2. [2P] Die Menge $R \subset \mathbb{R}^3$ ist abgeschlossen und beschränkt und nach Satz R:2.41 damit kompakt. Da f auf R stetig ist, nimmt f nach Satz R:4.16 auf R sein Maximum an. Auf E gilt $f(x,y,z) > 0$ und wenn eines der Argument x,y,z Null ist, so ist auch $f(x,y,z) = 0$. Somit nimmt f sein Maximum an einem Punkt mit $x,y,z > 0$ an, also in M.

3. [2P] Nach Teil 2. nimmt f sein Maximum auf der Menge M aus Teil 1 an. Dort gibt es nur eine mögliche Extremstelle, also nimmt f sein Maximum auf der Menge R im Punkt $(x,y,z) = (a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3})$ an. Der Wert von f an dieser Stelle ist
$$f(a/\sqrt{3}, b/\sqrt{3}, c/\sqrt{3}) = abc/\sqrt{27} .$$

Aufgabe 116

1. [1P]
$$\int_0^x e^{-ty}\, dy = -\frac{1}{t} e^{-ty}\Big|_0^x = \frac{1 - e^{-tx}}{t}$$

2. [2P] Partielle Integration ergibt
$$\int_0^x ye^{-y}\, dy = -ye^{-y}\Big|_0^x + \int_0^x e^{-y}\, dy = -xe^{-x} - e^{-y}\Big|_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$
Wir setzen $\varphi(y,t) = e^{-ty}$. Dann gilt nach Theorem R:9.42
$$f'(t) = \int_0^x D_2\varphi(y,t)\, dy = \int_0^x -ye^{-ty}\, dy$$

für

$$f(t) = \int_0^x \varphi(y,t)\ dy = \int_0^x e^{-ty}\ dy = \frac{1-e^{-tx}}{t}.$$

Demnach gilt $f'(t) = \frac{txe^{-tx}+e^{-tx}-1}{t^2}$ und somit

$$\int_0^x ye^{-y}\ dy = -f'(1) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1.$$

3. [3P]
   (a) Nach dem Hauptsatz gilt $f_1'(t) = \log(t^2+\pi^2)$.
   (b) Nach Satz R:9.42 gilt

   $$\begin{aligned} f_2'(t) = \int_0^\pi D_2(\log(x^2+t^2))\ dx &= \int_0^\pi \frac{2t}{x^2+t^2}\ dx \\ &= \frac{2t}{t^2}t\int_0^{\frac{\pi}{t}} \frac{1}{1+y^2}dy = 2\arctan(\frac{\pi}{t}). \end{aligned}$$

   (unter der Substitution $y = \frac{x}{t}$).
   (c) Nach Aufgabe 117 gilt

   $$f_3'(t) = \log(2t^2) + \int_0^t \frac{2t}{x^2+t^2}\ dx = \log(2t^2) + \frac{2t}{t^2}t\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\ dy,$$

   also $f_3'(t) = \log(2t^2) + \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 117

[2P] Definiere $g :]a,b[\times]a,b[\to \mathbb{R}$ als

$$g(t,s) = \int_a^t \varphi(x,s)dx\ .$$

Da φ stetig ist, gilt nach Satz R:6.20, dass $D_1 g(t,s) = \varphi(t,s)$. Da φ und $D_2\varphi$ auf $[a,b] \times [a,b]$ stetig sind, gilt nach Satz R:9.42, dass $D_2 g(t,s) = \int_a^t D_2\varphi(x,s)dx$. Da alle partiellen Ableitung von g auf $]a,b[\times]a,b[$ existieren und stetig sind, ist nach Satz R:9.21 g auf $]a,b[\times]a,b[$ stetig differenzierbar mit

$$[dg(t,s)] = \begin{pmatrix} \varphi(t,s) & \int_a^t D_2\varphi(x,s)dx \end{pmatrix}\ .$$

Definiere die differenzierbare Funktion $\gamma :]a,b[\to]a,b[\times]a,b[$, $\gamma(t) = (t,t)$. Dann $f(t) = g(\gamma(t))$ und nach der Kettenregel gilt $d(g\circ\gamma)(t) = dg(\gamma(t)) \circ d\gamma(t)$, also

$$[df(t)] = \begin{pmatrix} \varphi(t,t) & \int_a^t D_2\varphi(x,t)dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi(t,t) + \int_a^t D_2\varphi(x,t)dx\ .$$