Übung zur Analysis 2, SS 2010

10. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 108

1. Ja: für gegebenes $\varepsilon > 0$ setzen wir $\delta = \varepsilon$. Dann gilt
$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < c \cdot d(x,y) < c \cdot \varepsilon < \varepsilon$$
nach der Definition von Kontraktion.
2. Nein: z.B. hat $f : [-1,1]\backslash\{0\} \to [-1,1]\backslash\{0\}$, $x \mapsto \frac{x}{2}$ keinen Fixpunkt.
3. Ja: nach der Kettenregel ist $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ invertierbar und das kann nur der Fall sein wenn $m = n$ gilt.
4. Nein: $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ist nicht surjektiv aber lokal invertierbar.
5. Nein: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist bijektiv, aber f^{-1} ist auf keiner Umgebung von 0 differenzierbar.
6. Ja: Für alle $x \in U$ ist $df(x)$ invertierbar, und der Satz über die Umkehrfunktion impliziert dann, dass f^{-1} in einer Umgebung von $f(x)$ stetig differenzierbar ist. Da f bijektiv ist, gilt dies für alle Punkte aus $\mathbb{R}^m$.

Aufgabe 109

1. [1P] Es gilt
$$[df(x,y)] = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy - 1 \\ 1 + 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}.$$
2. [2P] Wir haben
$$\det([df(x,y)]) = (3x^2 - 3y^2)^2 + (6xy + 1)^2 \geq 0.$$
In dieser Ungleichung gilt Gleichheit genau dann wenn beide Summanden Null sind, also wenn $|x| = |y|$ und $6xy = -1$ gilt. Also gilt
$$\det([df(x,y)]) \neq 0 \Leftrightarrow (x,y) \in B := \{\pm \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)\}.$$
Da B eine endliche Menge ist, ist sie insbesondere abgeschlossen.
3. [1P] Wir haben $f(x,-x) = (x - 2x^3)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für $g(x) := x - 2x^3$ gilt $g(\frac{-1}{\sqrt{2}}) = g(\frac{1}{\sqrt{2}})$, also auch $f(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$. Demnach ist die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}^2\backslash B$ nicht injektiv.

Aufgabe 110

1. [1P] Die partiellen Ableitungen von f sind $D_1 f(x, y) = 2x$ und $D_2 f(x, y) = 2y$. Da diese stetig sind ist f stetig differenzierbar.

2. [1P] Aus Teil 1. folgt $[df(x, y)] = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$, also ist $h \mapsto df(x, y)(h, 0)$ gegeben durch $h \mapsto 2x \cdot h$. Diese Abbildung ist invertierbar, falls $2x \neq 0$ gilt.

3. [2P] Wir lösen $f(g(y), y) = 0$ nach y auf:

$$f(g(y), y) = 0 \Leftrightarrow g(y)^2 + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow g(y) = \pm\sqrt{1 - y^2}. \tag{1}$$

   Da $a < 0$ setzen wir

$$g : \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}, \quad y \mapsto -\sqrt{1 - y^2},$$

   eine (nach der Kettenregel) stetig differenzierbare Funktion. Ferner gilt

$$f(g(y), y) = (-\sqrt{1 - y^2})^2 + y^2 - 1 = 1 - y^2 + y^2 - 1 = 0$$

   (nach Konstruktion) und $g(b) = -\sqrt{1 - b^2} = -\sqrt{a^2} = a$ (hier verwenden wir $(a, b) \in X \Leftrightarrow a^2 = 1 - b^2$, woraus insbesondere $b \in \left]-1, 1\right[$ folgt).

4. [2P] Aus Teil 4. folgt $g'(y) = \frac{1}{2}(1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} 2y$ und aus Theorem R:9.28

$$g'(y) = -(A_x)^{-1} A_y = -\frac{2y}{2x} = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}},$$

   da $A_y(h) = df(x, y)(0, h) = 2yh$.

Aufgabe 111

1. [2P] Dass f für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ beliebige partielle Ableitungen hat und diese stetig sind folgt direkt aus der Kettenregel. Ferner folgt daraus auch

$$D_1 f(x, y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

   und

$$D_2 f(x, y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

   für $(x, y) \neq (0, 0)$.

2. [2P] Da $f(x, y) = 0$ falls $x = 0$ oder $y = 0$ folgt sofort $D_1 f(0, 0) = 0 = D_2 f(0, 0)$. Jetzt kann man z.B. explizit nachrechnen, dass

$$\lim_{(x,y)\to 0} D_i f(x, y) = 0$$

gilt um die Stetigkeit von $D_i f$ zu verifizieren. Alternativ kann man auch

$$D_1 f(0,y) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(f(s,y) - f(0,y)\right) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}(sy\frac{s^2-y^2}{s^2+y^2}) = -y$$
$$D_2 f(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x,t) - f(x,0)\right) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(xt\frac{x^2-t^2}{x^2+t^2}) = x,$$

berechnen. Hieraus ergibt sich auch die Stetigkeit von $D_i f$ in $(0,0)$: offensichtlich sind $y \mapsto D_1 f(0,y)$ und $x \mapsto D_1(x,y)$ für jedes fixe $y \neq 0$ stetig. Also existiert zu gegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass

$$|x-0| < \delta \Rightarrow |D_1(x,y) - D_1(0,y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$|y-0| < \delta \Rightarrow |D_1(0,y) - D_1(0,0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demnach gilt

$$|(x,y)-(0,0)| < \delta \Rightarrow |x-0| < \delta \text{ und } |y-0| < \delta \Rightarrow$$
$$|D_1 f(x,y) - D_1 f(0,0)| \leq |D_1 f(x,y) - D_1 f(0,y)| + |D_1 f(0,y) - D_1 f(0,0)| < \varepsilon$$

und $D_1 f$ ist stetig in $(0,0)$. Analog argumentiert man für $D_2 f$

3. [1P] Mit der Rechnung aus Teil 2. ergibt sich

$$D_1 D_2 f(0,0) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(D_{2f}(s,0) - D_2 f(0,0)\right) = 1$$

und

$$D_2 D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(D_1 f(0,t) - D_1 f(0,0)\right) = -1.$$

Aufgabe 112

1. [1P] Die Funktion $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ ist ein Polynom, also insbesondere Stetig. Demnach ist $U = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ offen, da $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ offen ist. Alternativ kann man auch Satz R:9.8(b) (zusammen mit Aufgabe 59) verwenden.

2. [1,5P] Falls $\|H\|$ klein genug, so dass $A + H \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} r(H) :=& \operatorname{Inv}(A+H) - \operatorname{Inv}(A) + A^{-1}HA^{-1} \\ =& (A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} \\ =& (A+H)^{-1}(A - (A+H) + (A+H)A^{-1}H)A^{-1} \\ =& (A+H)^{-1}(HA^{-1}H)A^{-1}, \end{aligned}$$

also $\|r(H)\| \leq \|(A+H)^{-1}\|\|A^{-1}\|^2\|H\|^2$, wobei $\|\cdot\|$ die Operatornorm bezeichnet. Also gilt

$$\lim_{H\to 0} \frac{\|r(H)\|}{\|H\|} \leq \lim_{H\to 0} \|(A+H)^{-1}\|\|A^{-1}\|^2\|H\| = 0.$$

Da alle Normen auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ äquivalent sind ([0,5P], siehe Aufgabe 59) gilt also auch

$$\lim_{H\to 0} \frac{|r(H)|}{|H|} = 0$$

in der Euklidischen Norm $|\cdot|$. Also ist Inv differenzierbar nach Definition R:9.11 mit $df(A)H = -A^{-1}HA^{-1}$.