Übung zur Analysis 2, SS 2010

7. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 94

1. Nein, z.B. ist $\sin(x)$ ($b_1 = 1$ und alle anderen Koeff. Null) kein Polynom.
2. Ja, da sich $\sin(nx)$ und $\cos(nx)$ auf ganz $\mathbb{R}$ in eine Potenzreihe um 0 entwickeln lassen gilt dies auch fuer endliche Linearkombinationen.
3. Nein, z.B. ist $\int_{-1}^{1} x^0 \cdot x^2 \, dx = \int_{-1}^{1} x^2 = \frac{2}{3} \neq 0$.
4. Nein, nach Theorem R:8.12 müssten die Koeffizienten eine Nullfolge bilden.
5. Nein, z.B. hat die Funktion f aus Aufgabe 95 eine Fourierreihe, die gegen f konvergiert, aber $x \mapsto |x|$ ist in 0 nicht differenzierbar und kann somit nicht um 0 in eine Potenzreihe entwickelt werden.

Aufgabe 95

1. [3P]

$$\int_{-1}^{1} p_0(x)p_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1\,dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} p_0(x)p_1(x)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} x = 0$$

$$\int_{-1}^{1} p_0(x)p_2(x)\,dx = \sqrt{\frac{5}{32}}\int_{-1}^{1} 3x^2 - 1\,dx = \sqrt{\frac{5}{32}}\,(x^3 - x)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} p_1(x)p_1(x)\,dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2\,dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} p_1(x)p_2(x)\,dx = \frac{\sqrt{15}}{4}\int_{-1}^{1} 3x^3 - x\,dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} p_2(x)p_2(x)\,dx = \frac{5}{8}\int_{-1}^{1} 9x^4 - 6x^2 + 1\,dx = \frac{5}{8}\,(\frac{9}{5}x^5 - 2x^3 + x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{5}{4}(\frac{9}{5} - 2 + 1) = 1$$

2. [3P] Wir betrachten das orthonormale System $(p_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$. Da sich jedes Polynom vom Grad 2 als Linearkombination von p_0, p_1 und p_2 schreiben läßt, gilt nach Theorem R:8.11 dass

$$\int_{-1}^{1} |\sin(\pi x) - p(x)|^2\, dx$$

genau für

$$p(x) = \sum_{m=0}^{2} c_m p_m(x)$$

mit

$$c_m = \int_{-1}^{1} \sin(\pi x) p_m(x)\, dx \tag{1}$$

minimal wird. Da p_0 und p_2 symmetrisch sind verschwindet (1) für $m = 0, 2$ und man berechnet

$$c_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} \sin(\pi x) x\, dx = \sqrt{\frac{3}{2\pi^2}} \left(-\cos(\pi x) x\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \cos(\pi x)\, dx \right) = \frac{\sqrt{6}}{\pi}.$$

Also $c_0 = c_2 = 0$, $c_1 = \sqrt{6}/\pi$ und $p(x) = \frac{3}{\pi} x$.

Aufgabe 96

1. [2P] Für $n = 0$ gilt

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{2\pi} \int_{0}^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}\ .$$

Für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} 2\pi c_n &= \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-inx} dx = -\int_{-\pi}^{0} x e^{-inx} dx + \int_{0}^{\pi} x e^{-inx} dx \\ &= -\Big(\frac{1}{-in} x e^{-inx}\Big)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{-in} \int_{-\pi}^{0} e^{-inx} dx + \Big(\frac{1}{-in} x e^{-inx}\Big)\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{-in} \int_{0}^{\pi} e^{-inx} dx \\ &= -\frac{1}{in}(-\pi)(-1)^n + \frac{1}{(-in)^2}(1 - (-1)^n) - \frac{1}{in}\pi(-1)^n - \frac{1}{(-in)^2}((-1)^n - 1)\ , \end{aligned}$$

also

$$c_n = \begin{cases} 0 & ;\ n \text{ gerade} \\ -\frac{2}{\pi} n^{-2} & ;\ n \text{ ungerade} \end{cases}\ .$$

2. [3P] Nach Satz R:8.14 genügt es, für jedes $x \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ und ein M zu finden, so dass $|f(x+t) - f(x)| \leq M|t|$ für $|t| < \delta$ gilt. Da f 2π-periodisch ist, genügt es, dies für alle $x \in\ ]-\pi, \pi]$ zu prüfen.

Wir wählen $M = 1$. Sei $x \in]-\pi, 0[$. Wähle $\delta > 0$ so, dass auch $]-x-\delta, x+\delta[$ in $]-\pi, 0[$ liegt. Dann $f(x) = -x$ und $f(x+t) = -x-t$ und es gilt

$$|f(x+t) - f(x)| = |-x-t+x| = |t| \ .$$

Genauso sieht man $|f(x+t) - f(x)| = |t|$ für $x \in]0, \pi[$. Für $x = 0$ (und $\delta < \pi$) gilt ebenfalls $|f(x+t) - f(x)| = |t|$.

Etwas Vorsicht ist bei $x = \pi$ geboten. Wegen der Periodizität gilt $f(\pi + t) = \pi - |t|$ für $|t| < \pi$ (am einfachsten für $t \geq 0$ und $t < 0$ getrennt nachprüfen). Also wieder $|f(\pi + t) - f(\pi)| = |\pi - |t| - \pi| = |t|$.

3. [2P] Nach Teil 2 konvergiert die Fourierreihe insbesondere in $x = 0$ gegen $f(0) = 0$. Also gilt

$$0 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in0}$$

Nun ist $c_n = 0$ für alle $n \neq 0$ und n gerade, und es gilt $c_n = c_{-n}$ für alle n. Also

$$0 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n = c_0 + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

woraus die Behauptung folgt.

Aufgabe 97

1. [3P] $f = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)^2 \, dx = 0$ ist klar. Nehmen wir $f \neq 0$ an, so existiert ein $x_0 \in]a, b[$ mit $\varepsilon := \frac{1}{2} f(x_0)^2 > 0$. Da f^2 stetig ist existiert ein $\delta > 0$ so dass $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq [a, b]$ und

$$|x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f^2(x_0) - f^2(x)| < \varepsilon,$$

also insbesondere $f^2(x) \geq \varepsilon$ für $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Da $f^2 \geq 0$ gilt somit

$$\int_a^b f(x)^2 \, dx = \int_a^{x_0-\delta} f(x)^2 \, dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)^2 \, dx + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)^2 \, dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varepsilon \, dx = 2\delta\varepsilon > 0,$$

also $f \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)^2 \, dx \neq 0$ und insgesamt

$$f = 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)^2 \, dx = 0$$

2. [3P] Die Implikation

$$f = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)x^n \, dx = 0$$

ist offensichtlich richtig.

Nach dem Satz von Stone-Weierstrass gibt es eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Also gilt

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)x^n \, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\
\Rightarrow &\int_a^b f(x)p_n(x) \, dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)p_n(x) \, dx = 0 \\
\Rightarrow &\int_a^b f(x) \lim_{n\to\infty} p_n(x) \, dx = 0 \\
\Rightarrow &\int_a^b f(x)^2 \, dx = 0 \\
\Rightarrow &f = 0
\end{aligned}$$

nach Theorem R:7.16 und Teil 1.