Übung zur Analysis 2, SS 2010

6. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 90

Punkte separieren:

1. Ja, für $x \in X$ bezeichne χ_x die Funktion, die nur in x den Wert 1 und ansonsten den Wert 0 annimmt. Dann gilt $\chi_x(x) \neq \chi_x(y)$ falls $x \neq y$.

2. Nein, da für $x = 0$ und $y = 1$ immer $f(x) = f(y)$ gilt.

3. Ja. Falls $x = (x_1, ..., x_n) \neq y = (y_1, ..., y_n)$ in $\mathbb{R}^n$, so gilt $x_i \neq y_i$ für mindestens ein $1 \leq i \leq n$. Offensichtlich ist $\lambda_i((x_1, ..., x_n)) = x_i$ linear und es gilt
$$\lambda_i(x) = x_i \neq y_i = \lambda_i(y).$$

Algebren:

1. Ja: für zwei Funktionen f, g und $c \in \mathbb{C}$ sind $f + g$, $f \cdot g$ und $c \cdot f$ wieder Funktionen, und die konstante Funktion 1 ist auch in der Menge.

2. Nein: falls $f > 0$, so ist $(-1) \cdot f \ngeq 0$.

3. Ja: falls f, g differenzierbar und $c \in \mathbb{R}$, so sind $f + g$, $f \cdot g$ und $c \cdot f$ wieder differenzierbar. Die konstante Funktion 1 ist auch differenzierbar.

4. Ja: für zwei stetige und beschränkte Funktionen f, g und $c \in \mathbb{C}$ sind $f + g$, $f \cdot g$ und $c \cdot f$ wieder stetig und beschränkt. Die konstante Funktion 1 ist auch stetig und beschränkt.

5. Nein: z.B. ist $x + x^2$ nicht in $\{x^n : [0, 1] \to \mathbb{R} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ enthalten.

Aufgabe 91

1. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition existieren $N, M \in \mathbb{N}$, so dass
$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |g(x) - g_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$
für alle $n > N$, $m > M$, und alle $x \in X$ gilt. Also gilt
$$|f(x) + g(x) - f_n(x) - g_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |g(x) - g_n(x)| < \varepsilon$$
für alle $n > \max\{M, N\}$ und somit konvergiert $f_n + g_n$ gleichmäßig gegen $f + g$.

2. Da $\|f\| := \sup\{|f(x)|\,|x \in X\}$ gilt für alle $x \in X$

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| \leq |f(x)|\|g\| \leq \|f\|\|g\|,$$

und somit auch $\|fg\| = \sup\{|f(x)g(x)|\,|\,x \in X\} \leq \|f\|\|g\|$.

3. Nach Satz 8.4.2 gilt $f, g \in \mathcal{C}(X)$. Gleichmäßige Konvergenz ist nach Satz 8.4.1 das gleiche wie Konvergenz in $\mathcal{C}(X)$ bzgl. der Metrik $d(h, h') = \|h - h'\|$. Da $\|g_n\| \leq \|g\| + \varepsilon =: M$ für ein $\varepsilon > 0$ und alle $n > N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, gilt

$$\begin{aligned}\|fg - f_n g_n\| &= \|f(g - g_n) + (f - f_n)g_n\| \leq \|f(g - g_n)\| + \|(f - f_n)g_n\| \\ &\leq \|f\|\|g - g_n\| + \|f - f_n\|\|g_n\| \leq \|f\|\|g - g_n\| + \|f - f_n\|M.\end{aligned}$$

Da $f_n \to f \Leftrightarrow \|f - f_n\| \to 0$ implizieren $f_n \to f$ und $g_n \to g$ in $\mathcal{C}(X)$ also $f_n g_n \to fg$.

4. Es gilt: $f \in \overline{A} \Leftrightarrow f$ ist gleichmäßiger Grenzwert einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \in A$. Nach Teil 1. folgt, dass, falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ glm. gegen f und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ glm. gegen g konvergiert, dann auch $f_n + g_n$ gleichmäßig gegen $f + g$ konvergiert. Also ist $f + g$ auch ein gleichmäßiger Grenzwert einer Folge in A. Ebenso folgt $f, g \in \overline{A} \Rightarrow f \cdot g \in \overline{A}$ aus Teil 3. Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ glm. gegen f konvergiert, so konvergiert $(c \cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ glm. gegen $c \cdot f$. Also gilt $f \in \overline{A} \Rightarrow c \cdot f \in \overline{A}$ und $\overline{A}$ ist somit eine Algebra.

Aufgabe 92

1. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da F gleichmäßig stetig ist existiert ein $\delta > 0$ so dass

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \varepsilon \tag{1}$$

für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f(x) - f_n(x)| < \delta$$

für alle $n > N$ und alle $x \in X$. Damit gilt nach (1)

$$|F(f(x)) - F(f_n(x))| < \varepsilon$$

für alle $x \in X$ und $n > N$.

2. Da f_n stetig auf einer kompakten Menge ist, ist jedes f_n, sowie die Grenzfunktion f (nach Satz 8.4.2) beschränkt. Da $|f_n(x)| \leq |f(x)| + \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ alle $n > N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, nehmen also alle f_n Werte in der abgeschlossenen und beschränkten Menge

$$B := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sup\{\|f_1\|, ..., \|f_N\|, \|f\|\} + \varepsilon\}$$

an. Folglich gilt $F \circ f_n = F|_B \circ f_n$, wobei $F|_B$ die Einschränkung von F auf B ist. Da $F|_B$ nach Satz 5.3.8 gleichmäßig stetig ist, ist die Folge $(F|_B \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also gleichmäßig konvergent nach Teil 1.

Aufgabe 93

Gleichmäßiger Abschluss von $\mathbf{E_1}$:

Sei f_k eine Folge in E_1, die gleichmäßig auf $[0,1]$ konvergiert. Dann gilt $f_k(x) = x^{n_k}$ für eine Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $n_k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass dann n_k ab einem $K \in \mathbb{N}$ bereits konstant ist. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkt: Dann gibt es eine Teilfolge n_{k_l}, die streng monoton steigend ist. Die Teilfolge $(f_{k_l}(x))_{l\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen 0 für $x < 1$, denn $n_{k_l} \to \infty$ für $l \to \infty$, und somit $\lim_{l\to\infty} x^{n_{k_l}} = 0$. Für $x = 1$ ist $f_k(x) = 1$, also auch $\lim_{l\to\infty} f_{k_l}(1) = 1$. Per Annahme konvergiert f_k gleichmäßig, also insbesondere auch punktweise. Damit konvergiert auch jede Teilfolge gegen den Grenzwert, und wir sehen, dass die Grenzfunktion nicht stetig ist. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 8.2.6=R:7.12. Somit kann Fall 1 nicht auftreten.

2. Die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt: Also hat diese Folge Werte in einem kompakten Raum und demnach mindestens einen Häufungspunkt. Sie hat sogar genau einen, da es bei zwei verschiedenen Häufungspunkten zwei konstante Teilfolgen n_{k_m} und n_{k_l} gäbe, was aber die Konvergenz (sogar die punktweise Konvergenz) von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ausschliessen würde.

Also ist jede gleichmäßig konvergente Folge von Monomen ab einem $N \in \mathbb{N}$ konstant, und demnach ist der gleichmäßige Abschluss von E_1 gleich E_1.

Gleichmäßiger Abschluss von $\mathbf{E_2}$:

Die Folge $f_k(x) = \frac{1}{2^k}x^k$ ist eine Folge in E_2, die offensichtlich punktweise gegen die konstante Nullfunktion auf $[0,1]$ konvergiert. Da $[0,1]$ kompakt ist, jedes f_k und die Grenzfunktion stetig ist und

$$\frac{1}{2^k}x^k \geq \frac{1}{2^{k+1}}x^{k+1}$$

für $x \in [0,1]$ gilt, ist die Konvergenz nach Theorem R:7.13 gleichmäßig.
Jede gleichmäßig konvergente Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2}x)^{n_k}$ in E_2, für die $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, konvergiert gegen die konstante Nullfunktion, da

$$0 \leq (\frac{1}{2}x)^{n_k} \leq \frac{1}{2^{n_k}}$$

für unbeschränktes n_k gegen Null konvergiert. Falls n_k beschränkt ist, so ist die Folge irgendwann konstant (siehe oben) und konvergiert gegen ein Element aus E_2. Also ist

$$\overline{E}_2 = E_2 \cup \{0 : [0,1] \to \mathbb{R}\}.$$