Übung zur Analysis 2, SS 2010

5. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 87

1. [1P] Dies ist nach der Definition des Konvergenzradius wahr.
2. [1P] Dies ist falsch, z.B. konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ für $x = -1$, aber nicht für $x = 1$.
3. [1P] Dies ist nach der Definition von punktweiser Konvergenz wahr.
4. [1P] Dies ist nach Theorem R:8.1 wahr.
5. [1P] Dies ist ebenfalls nach Theorem R:8.1 wahr.
6. [1P] Nein, denn ansonsten wäre $f(x) = |x|$ in 0 differenzierbar.

Aufgabe 88

1. [2P] Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat Konvergenzradius $R = 1$ und ist eine Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{1-x}$. Da
$$\int_a^b \frac{1}{1-t}\, dt = -\log(1-t)\Big|_a^b$$
(für $-1 < a < b < 1$) und $\log(1-t)$ für $t \to 1$ nicht konvergiert, konvergiert das uneignetliche Integral nicht.
2. [2P] Wir haben $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ und somit hat $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ den gleichen Konvergenzradius wie die geometrische Reihe (nach Theorem R:8.1). Ferner gilt
$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

Aufgabe 89

1. [2 P] Es gilt $\sum_{k=0}^{n} x^k = (1-x^{n+1})/(1-x)$. Für $x = e^{i\varphi}$ ist dies die Formel aus dem Hinweis. Damit gilt
$$\Big|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\varphi}\Big| = \frac{|1-e^{i(n+1)\varphi}|}{|1-e^{i\varphi}|} \leq \frac{2}{|e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}|} = \frac{1}{\sin(\varphi/2)}\ .$$
Es folgt, dass die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} e^{ik\varphi}$ eine beschränkte Folge bilden. Die Folge $1/k$ ist monoton fallend und konvergiert gegen 0. Nach Satz R:3.42 konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} e^{ik\varphi}/k$ (für $0 < \varphi < 2\pi$).

2. [2 P] Für $\varphi = 0$ ist die Reihe Null. Für $0 < \varphi < 2\pi$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\varphi)}{k} = \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ik\varphi}}{k} - \frac{1}{2i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-ik\varphi}}{k} \ ,$$

   was nach Teil 1 konvergiert. Die Periodizität von f folgt aus der Periodizität von $\sin(x)$.

3. [2 P] Da die Reihe $f(\varphi)$ konvergiert, folgt die Aussage sofort aus Satz 8.3.7.

4. [4 P] Da die Potenzreihe $g(x)$ für $x = 1$ konvergiert, ist der Konvergenzradius $R \geq 1$. Nach Satz R:8.1 gilt für $|x| < 1$, dass $g(x)$ gliedweise differenziert werden kann. Für $x = 0$ gilt $g'(x) = \sin(\varphi)$ (nur $k = 1$ trägt zur Summe bei). Für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\varphi) x^k = \frac{1}{x} \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{ik\varphi} - e^{-ik\varphi}\right) x^k \\
&= \frac{1}{x} \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{i\varphi} x)^k - \frac{1}{x} \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-i\varphi} x)^k \\
&= \frac{1}{x} \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - e^{i\varphi} x} - \frac{1}{x} \frac{1}{2i} \frac{1}{1 - e^{-i\varphi} x} \\
&= \frac{1}{x} \frac{1}{2i} \frac{1 - e^{-i\varphi} x - 1 + e^{i\varphi} x}{(1 - e^{i\varphi} x)(1 - e^{-i\varphi} x)} = \frac{\sin\varphi}{1 + x^2 - 2x\cos\varphi}
\end{aligned}$$

   Für die Summe der geometrischen Reihe haben wir benutzt, dass $|e^{\pm i\varphi} x| = |x| < 1$. Insgesamt gilt das geforderte Ergebnis für alle x mit $|x| < 1$.

5. [2 P] Sei

$$h(x) = \arctan\left(\frac{x \sin\varphi}{1 - x\cos\varphi}\right) \ .$$

   Zu zeigen ist, dass $h(x) = g(x)$ für $|x| < 1$. Die Ableitung von arctan ist aus A.69 bekannt. Damit gilt

$$h'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x \sin\varphi}{1 - x\cos\varphi}\right)^2} \frac{(1 - x\cos\varphi)\sin\varphi - x\sin\varphi(-1)\cos\varphi}{(1 - x\cos\varphi)^2} = g'(x) \ ,$$

   wobei der letzte Schritt das Ergebnis aus Teil 4 ist. Es gilt $h(0) = 0$. Aus Teil 3 sehen wir, dass $g(0) = 0$. Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechung gilt damit

$$h(x) = \int_0^x h'(t) dt = \int_0^x g'(t) dt = g(x) \ .$$

6. [2 P] Wir benutzen $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$, $\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Damit gilt (setze $x = \varphi/2$)

$$\begin{aligned} \frac{\sin(2x)}{1-\cos(2x)} &= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1-\cos(x)^2+\sin(x)^2} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2\sin(x)^2} \\ &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = \tan(\tfrac{1}{2}(\pi-\varphi)) \ . \end{aligned}$$

Für $x \in]0, \pi[$ ist $\sin(x) \neq 0$, also sind die einzelnen Ausdrücke für $\varphi \in]0, 2\pi[$ wohldefiniert.

Nach Teil 3 konvergiert $g(x)$ gleichmäßig auf $[0, 1]$, und die einzelnen Summanden sind stetig auf $[0, 1]$. Nach Satz R:7.12 ist $g(x)$ stetig auf $[0, 1]$. Somit gilt

$$g(1) = \lim_{x\to 1} g(x) = f(\varphi) \ .$$

Für $y \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ gilt, dass $\arctan(\tan(y)) = y$. Mit $y = \frac{1}{2}(\pi - \varphi)$ gilt $\tan(y) = \sin\varphi/(1 - \cos\varphi)$ und somit $g(1) = \arctan(\tan(y)) = y$. Daraus folgt die Behauptung.