Übung zur Analysis 2, SS 2010

4. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 84

1. [1 P] Ja, dies gilt nach Satz R:7.11
2. [1 P] Dies ist i.A. falsch, z.B. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ konvergiert punktweise aber nicht gleichmäßig.
3. [1 P] Dies stimmt, es folgt direkt aus der Definition dass $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes feste x konvergiert.
4. [1 P] Dies ist i.A. falsch (gilt nur wenn die f_n auch stetig sind). Ist z.B. $f_n = f$ mit f unstetig, so ist die Konvergenz trivialerweise gleichmäßig aber die Grenzfunktion f nicht stetig.
5. [1 P] Dies ist i.A. falsch, z.B. kann man f_n so wählen dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert und $f(x) = |x|$ gilt.
6. [1 P] Dies gilt nach Satz R:7.16.

Aufgabe 85

1. [2 P] Für $x > 0$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx} = 0,$$
also konvergiert die Folge punktweise gegen die konstante Nullfunktion. Letztere ist insbesondere stetig, aber die Konvergenz ist nicht gleichmäßig. In der Tat ist für jedes $0 < \varepsilon < 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$
$$|0(x) - f_n(x)| = \frac{1}{1+nx} > \varepsilon$$
falls $0 < x < \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon n}$.
2. [2 P] Die Folge $(x \cdot \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert z.B. für $x = \frac{\pi}{2}$ nicht.
3. [2 P] Die Folge $(nx^4 e^{-nx^2})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen 0, also konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die konstante Nullfunktion. Die Nullstellen der ersten Ableitung sind 0 und $\pm\sqrt{\frac{2}{n}}$ und nach Satz R:5.8 sind dies die einzigen möglichen Extrema von f_n. Da nun $\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$, $f_n(0) = 0$, $f_n \geq 0$ und $f_n(x) = f_n(-x)$ gilt hat $|f_n|$ in $\pm\sqrt{\frac{2}{n}}$ das Maximum
$$n \cdot \frac{4}{n^2} \cdot \frac{1}{e^2},$$

welches für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Damit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig nach Satz R:7.9.

Aufgabe 86

1. [4P] Setze $u_n(t) = 2^{-n} f(3^{2n-1}t)$, so dass $u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$. Setze $M_n = 2^{-n}$. Wegen $0 \leq f(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $0 \leq u_n(t) \leq M_n$ für $t \in [0,1]$. Ferner gilt, unter Verwendung der geometrischen Reihe,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \ .$$

   Daraus folgt zum einen (Majorantenkriterium für Reihen), dass für alle $t \in [0,1]$ gilt

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \leq 1 \ ,$$

   und zum anderen folgt aus dem Weierstraßschen Konvergenzkriterium (Satz R:7.10), dass $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ gleichmäßig konvergiert. Da $u_n(t)$ stetig ist, folgt damit aus Satz R:7.12, dass auch die Summe $u(t)$ der Reihe stetig ist.

   Genauso geht man für $v(t)$ vor, mit $v_n(t) = 2^{-n} f(3^{2n-2}t)$.

2. [2P] Es gilt $0 \leq 3^{-i}a_i \leq 3^{-i}$ und somit

$$0 \leq t_0 \leq 2\sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 1 \ .$$

3. [3P] Schreibe

$$3^{k-1}t_0 = 2\,3^{k-1}\sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i}a_i = A + B + C$$

   mit

$$A = 2\sum_{i=1}^{k-1} 3^{k-i-1}a_i \quad , \quad B = \frac{2}{3}a_k \quad , \quad C = 2\sum_{i=k+1}^{\infty} 3^{k-i-1}a_i \ .$$

   In der Summe für A treten nur nicht-negative Potenzen von 3 auf, so dass $A \in 2\mathbb{Z}$. Ferner gilt $C \geq 0$ und

$$C \leq 2\sum_{i=k+1}^{\infty} 3^{k-i-1} = \frac{1}{3} \ .$$

   Da f Periode 2 hat, gilt (wegen $A \in 2\mathbb{Z}$), dass $f(3^{k-1}t_0) = f(A+B+C) = f(B+C)$. Angenommen, $a_k = 0$. Dann $B = 0$ und $f(B+C) = f(C) = 0$, da $f(x) = 0$ für $x \in [0, \frac{1}{3}]$. Angenommen, $a_k = 1$. Dann $B = \frac{2}{3}$ und $f(B + C) = f(\frac{2}{3} + C) = 1$, da $f(x) = 1$ für $x \in [\frac{2}{3}, 1]$. Insgesamt erhalten wir

$$f(3^{k-1} t_0) = a_k \ .$$

4. [1P] Folgt durch Einsetzen aus Teil 3.

5. [2P] Nach Teil 1 und Satz R:4.10 ist Φ stetig.

   Jede reelle Zahl $r \in [0, 1]$ kann in der Form

   $$r = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_n$$

   mit $a_n \in \{0, 1\}$ geschrieben werden (allerdings nicht eindeutig). Dies ist die Binärschreibweise der reellen Zahlen. Der Beweis, dass es eine solche Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, geht genauso wie Aufgabe 12.

   Für einen beliebigen Punkt $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ wähle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $b_n, c_n \in \{0, 1\}$ und

   $$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n \quad , \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} c_n \ .$$

   Setze $a_{2n} = b_n$ und $a_{2n-1} = c_n$. Dann gilt, mit t_0 wie in Teil 2,

   $$u(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(3^{2n-1} t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} a_{2n} = x \quad , \quad v(t_0) = y$$

   und damit auch $\Phi(t_0) = (x, y)$. Somit ist Φ surjektiv.

6. Φ ist nicht injektiv: Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$, $a_n = 0$ $(n \geq 2)$. Dann $t_0 = \frac{2}{3}$ und $u(t_0) = 0$, $v(t_0) = \frac{1}{2}$. Betrachte nun die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 0$, $a_{2n-1} = 1$ für $n > 1$ und $a_{2n} = 0$ für alle n. Dann

   $$t_0 = 2 \sum_{i=2}^{\infty} 3^{-2i+1} = \frac{1}{4 \cdot 3} \neq \frac{2}{3}$$

   und

   $$u(t_0) = 0 \quad , \quad v(t_0) = \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} \ .$$