Übung zur Analysis 2, SS 2010

3. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 79

Sei $c \neq -1$. Da $(t^c)' = ct^{c-1}$ gilt $(\frac{1}{c+1}t^{c+1})' = t^c$ und somit

$$\int_a^b t^c\, dt = \frac{1}{c+1} t^{c+1} \Big|_a^b = \frac{1}{c+1}(b^{c+1} - a^{c+1})$$

für $0 < a < b$.
Für $c = -1$ gilt

$$\int_a^b t^c\, dt = \log(b) - \log(a).$$

1. [2P] Das Integral konvergiert für $c > -1$, da dann $\lim_{a \searrow 0} a^{c+1}$ existiert. Falls $c = -1$, so konvergiert das Integral nicht, da $\lim_{a \searrow 0} \log(a)$ nicht existiert. Für $c < -1$ konvergiert das Integral nicht, da $\lim_{a \searrow 0} a^{c+1}$ nicht existiert.

2. [2P] Analog zu Teil 1. sieht man dass das Integral genau für $c < -1$ konvergiert.

3. [2P] Falls $c = 0$ konvergiert das Integral offensichtlich nicht. Da $(\frac{1}{c}e^{ct})' = e^{ct}$ gilt
$$\int_0^b e^{ct}\, dt = \frac{1}{c}(e^{cb} - 1), \tag{1}$$
so dass
$$\lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{ct}\, dt$$
genau dann existiert wenn $c < 0$ gilt.

Aufgabe 80

1. [1P] Mit partieller Integration erhält man
$$\int_0^\pi e^t \sin(t)\, dt = e^t \sin(t)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^t \cos(t)\, dt =$$
$$0 - \left(e^t \cos(t)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^t \sin(t)\, dt\right)$$
und somit
$$\int_0^\pi e^t \sin(t)\, dt = \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

2. [1P] Nach der Definition von $\sinh(t)$ folgt direkt

$$\int_0^1 e^t \sinh(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2t} - 1\, dt = \frac{1}{4}(e^2 - 1) - \frac{1}{2}.$$

3. [1P] Mit partieller Integration erhält man

$$\int_x^1 1 \cdot \log(t)\, dt = t \cdot \log(t)|_x^1 - \int_x^1 t\frac{1}{t}\, dt = x(1 - \log(x)) - 1$$

4. [1P] Partielle Integration ergibt

$$\int_1^x t \cdot \log(t)\, dt = \frac{1}{2}\left(t^2 \cdot \log(t)\big|_1^x - \int_1^x t\, dt\right) = \frac{1}{2}(x^2 \log(x) - \frac{x^2 - 1}{2})$$

5. [1P] Partielle Integration ergibt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t)\sin(t)\, dt = -\cos(t)\sin(t)|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(t)\cos(t)\, dt$$

und mit $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$ kann man nach

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(t)\, dt = \frac{1}{2}(-\cos(t)\sin(t)|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt) = \pi$$

auflösen.

Aufgabe 81

1. [2P] Aus Aufgabe 80.3 folgt dass $x(\log(x) - 1)$ eine Stammfunktion von $\log(x)$ ist. Da

$$\lim_{x\searrow 0} x(\log(x) - 1) = \lim_{x\searrow 0} -x = 0$$

(nach l'Hospital) konvergiert das Integral gegen

$$\lim_{x\searrow 0}\int_x^1 \log(t)\, dt = \lim_{x\searrow 0}\big((-1) - x(\log(x) - 1)\big) = -1.$$

2. [2P] Es gilt

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(x)$$

Nach Aufgabe 69.4. Ferner gilt $\lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ nach Aufgabe 69, also konvergiert

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt$$

gegen $\frac{\pi}{2}$. Da $\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1+(-t)^2}$ gilt somit auch

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

und insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi.$$

Aufgabe 82

[3 P] Wir haben $\gamma'(t) = (-r\sin(t), r\cos(t), \lambda)$. Nach Satz R:6.27 gilt für die Länge $\Lambda(\gamma)$ der Kurve γ

$$\Lambda(\gamma) = \int_0^{2\pi w} |\gamma'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi w} \sqrt{r^2\sin^2(t) + r^2\cos^2(t) + \lambda^2}\, dt = 2\pi w\sqrt{r^2+\lambda^2}.$$

Aufgabe 83

1. [2P] Nach Satz 5.7.3(5) ist die Funktion $t^{x-1}e^{-t/2}$ beschränkt auf $[1,\infty[$. Sei M eine obere Schranke. Dann $0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq Me^{-t/2}$. Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty Me^{-t/2}dt$ konvergiert nach Aufgabe 79, und nach Satz 7.4.4 (Majorantenkriterium) konvergiert damit auch $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

2. [1P] Auf $]0,1]$ gilt $0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$. Nach Aufgabe 79 konvergiert $\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ und nach Satz 7.4.4 (bzw. der Bemerkung danach) somit auch $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt$.

3. [2P] Es gilt $(t^x e^{-t})' = xt^{x-1}e^{-t} - t^x e^{-t}$, also

$$\int_a^b xt^{x-1}e^{-t}dt = \left(t^x e^{-t}\right)\Big|_a^b + \int_a^b t^x e^{-t}dt\ .$$

   Da $t^x e^{-t} \to 0$ für $t \to 0$ (da $x > 0$) und für $t \to \infty$ (Satz 5.7.3) gilt für den Grenzwert $a \to 0$ und $b \to \infty$,

$$x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^\infty t^x e^{-t}dt\ ,$$

   also $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.

4. [1P] Es gilt $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$ nach Gleichung (1). Sei $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \leq N$ gezeigt. Dann $\Gamma(N+2) = (N+1)\Gamma(N+1) = (N+1)\cdot N! = (N+1)!$.