Übung zur Analysis 2, SS 2010

2. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 74

1. [1P] Nach Theorem R:6.10 ist $I \in \mathcal{R}$ auf $[-1, x]$ für alle $x > -1$.
2. [2P] Es folgt $\int_{-1}^{x} 0\, dt = 0$ und $\int_{0}^{x} 1\, dt = x$ unmittelbar aus der Definition. Also gilt nach Satz R:6.12(c)
$$F(x) = \int_{-1}^{x} I = \begin{cases} 0 \text{ falls } x \leq 0 \\ x \text{ falls } x > 0 \end{cases}$$
3. [2P] Diese Funktion ist auf $[-1, \infty[$ stetig und auf $[-1, \infty[\, \setminus \{0\}$ differenzierbar.

Aufgabe 75

1. [1P] Da $(e^t + t)' = e^t + 1$ gilt $\int_0^1 e^t + 1\, dt = e^1 + 1 - (e^0 + 0) = e$
2. [1P] Da $-\cos'(t) = \sin(t)$ gilt $\int_{-1}^{1} \sin(t) = -\cos(1) + \cos(-1) = 0$
3. [1P] Da $((e^{t^2}))' = 2te^{t^2}$ gilt $\int_0^x te^{t^2} = \frac{1}{2}(e^{x^2} - e^{0^2}) = \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1)$.
4. [1P] Da $(t^a)' = at^{a-1}$ gilt $(\frac{1}{a+1} t^{a+1})' = t^a$ und somit $\int_0^x t^a\, dt = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$
5. [1P] Sei $a = 1$. Dann gilt $\int_0^x a^t\, dt = \int_0^x 1\, dt = x$. Sei nun $a \neq 1$. Da $(a^t)' = (e^{\log(a)t})' = \log(a)a^t$ gilt $\int_0^x a^t\, dt = \frac{1}{\log(a)}(a^x - 1)$.
6. [1P] Da $\log(f(t))' = \frac{f'(t)}{f(t)}$ gilt $\int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \log(f(x)) - \log(f(0))$

Aufgabe 76

1. [3 P] In der Notation, die zur Definition des Stieltjes-Integrals verwendet wird (siehe Definition R:6.2) gilt $\Delta(c\alpha)_i = c \cdot \Delta\alpha_i$ und somit
$$S(P, f, (c\alpha)) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta(c\alpha)_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = c \cdot S(P, f, \alpha)$$
und
$$s(P, f, (c\alpha)) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta(c\alpha)_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i = c \cdot s(P, f, \alpha).$$

Da $c \geq 0$ vorausgesetzt war gilt (z.B. nach Aufgabe 47)

$$\inf_P S(P, f, (c\alpha)) = \inf_P c \cdot (S(P, f, \alpha)) = c \cdot \inf_P (S(P, f, \alpha))$$

und

$$\sup_P s(P, f, (c\alpha)) = \sup_P c \cdot (s(P, f, \alpha)) = c \cdot \sup_P (s(P, f, \alpha)).$$

Da $\sup s(P, f, \alpha) = \inf S(P, f, \alpha)$ vorausgesetzt war gilt also

$$\sup s(P, f, (c\alpha)) = \inf S(P, f, (c\alpha))$$

und somit $f \in \mathcal{R}(c\alpha)$ mit

$$\int_a^b f \, d(c\alpha) = c \int_a^b f \, d\alpha.$$

Zum einen war $c \geq 0$ wichtig, um wie oben sup und inf und Multiplikation mit c zu vertauschen, zum anderen wäre für $c < 0$ die Funktion $c\alpha$ nicht mehr monoton gewesen und das Stieltjes-Integral gar nicht definiert.

2. [1 P] $a \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a, b]$ z.B. nach Satz R:6.10. Da $M_i = 1$ ist gilt

$$\sum_i M_i \cdot \Delta\alpha_i = \alpha(x_1) - \alpha(\underbrace{x_0}_{=a}) + (\alpha(x_2) - \alpha(x_1)) + ...$$
$$... + (\alpha(x_{n-1}) - \alpha(x_{n-2})) + (\alpha(\underbrace{x_n}_{=b}) - \alpha(x_{n-1})) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Dies ist unabhängig von der Partition von $[a, b]$, also gilt

$$\overline{\int_a^b} 1 \, d\alpha = \int_a^b 1 \, d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a).$$

Aufgabe 77

Es sei

$$m := \inf\{f(x) | x \in [a, b]\}$$
$$M := \sup\{f(x) | x \in [a, b]\}$$

Da $[a, b]$ kompakt ist werden diese Werte von f auch angenommen [1P], also nimmt $x \mapsto f(x)(b-a)$ die Werte $m(b-a)$ und $M(b-a)$ an. Nach Satz R:6.12(b) gilt [1P]

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b - a).$$

Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen [2P] nimmt $x \mapsto f(x)(b-a)$ jeden Wert zwischen $m(b - a)$ und $M(b - a)$ an, also gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x)(b - a) = \int_a^b f(t) \, dt$.

Aufgabe 78

1. [1P] Nach Aufgabe 75.4 gilt $\int_a^b t\,dt = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

2. [2P] Nach Satz R:6.17 haben wir

$$\int_a^b f\,df = \int_a^b f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (f(t)^2)'dt = \frac{1}{2}(f(b)^2 - f(a)^2).$$

3. [2P] Mit der Substitutionsregel (Satz R:6.19) erhalten wir

$$\int_a^b f\,df = \int_{f(a)}^{f(b)} t\,dt$$

(in der Notation von Satz R:6.19 mit $\alpha(t) = t$, $f(t) = t$ und $\varphi(t) = f(t)$). Nach Teil 1. erhalten wir somit unter der schwächeren Voraussetzung als in Teil 2. das selbe Ergebnis

$$\int_a^b f\,df = \frac{1}{2}(f(b)^2 - f(a)^2).$$