Übung zur Analysis 2, SS 2010

1. Übungsblatt – Lösungsskizzen

Aufgabe 71

1. [2P] Aus $(e^{i\pi/4})^2 = i$ und $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ folgt (schreibe $s = \sin(\pi/4)$ und $c = \cos(\pi/4)$)

$$i = (c + is)^2 = c^2 + 2isc - s^2 \ ,$$

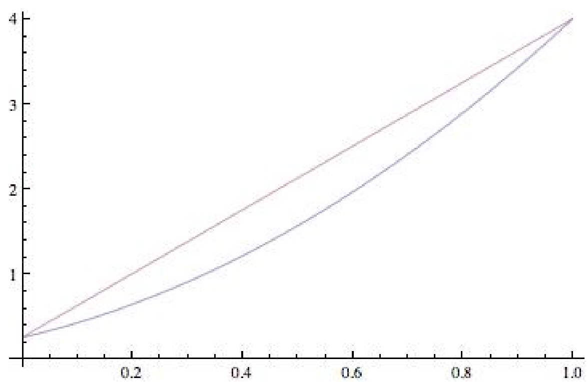
also $c^2 - s^2 = 0$. Da sowieso $s^2 + c^2 = 1$ folgt $2s^2 = 1$, also $s = \pm 1/\sqrt{2}$. Aber wir wissen, dass $\sin(x) > 0$ für $x \in]0, \pi[$, also $\sin(\pi/4) = +1/\sqrt{2}$.

2. [2P] Genauso (mit $s = \sin(\pi/6)$, etc): $i = (c+is)^3 = c^3 + 3ic^2s - 3cs^2 - is^3$, also $c(c^2 - 3s^2) = 0$.

3. [2P] Es gilt $\sin(\pi/3)^2 + \cos(\pi/3)^2 = 1$. Aber $\cos(\pi/3) = \sin(\pi/2 - \pi/3) = \sin(\pi/6)$. Somit $\sin(\pi/3)^2 + 1/4 = 1$.

Aufgabe 72

1. [1P] Der untere Graph ist $g(\lambda) = q(\lambda x + (1 - \lambda)y)$ und der obere ist $h(\lambda) = \lambda q(x) + (1 - \lambda)q(y)$:



2. [3P] Seien $x, y \in]a, b[$ und $\lambda \in]0, 1[$. Da f konvex ist, gilt

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \ .$$

Beide Seiten der Ungleichung liegen in $]c, d[$ (warum?). Da g monoton steigend ist, gilt

$$g(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq g(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \ .$$

Da g konvex ist, gilt

$$g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y)) \ .$$

Zusammen zeigt dies die Behauptung.

3. [3P] Da $f''(x) \geq 0$, ist $f'(x)$ monton steigend (Satz 6.2.5). Seien $x, y \in]a, b[$ mit $x < y$, und sei $0 < \lambda < 1$. Setze $c = \lambda x + (1-\lambda)y$. Dann $x < c < y$. Da f' auf $[x, y]$ differenzierbar ist, ist der Mittelwertsatz (Satz 6.2.4) anwendbar. Man erhält

$$f(c) - f(x) = f'(\xi_1)(c-x) \quad \text{und} \quad f(y) - f(c) = f'(\xi_2)(y-c) \ ,$$

wobei $\xi_1 < \xi_2$ (warum?). Da f' monoton steigend ist, folgt

$$\frac{f(c) - f(x)}{c-x} \leq \frac{f(y) - f(c)}{y-c}$$

Da $c - x = (1-\lambda)(y-x)$ und $y - c = \lambda(y-x)$ folgt die Behauptung.

4. [3P] Seien x, y, c wie in der Lösung von Teil 3. Da f konvex ist, gilt $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, also auch

$$\frac{f(c) - f(x)}{c-x} \leq \frac{f(y) - f(c)}{y-c} \ .$$

Da $0 < \lambda < 1$ beliebig war, gilt dies bei gegebenem $x < y$ für alle $x < c < y$. Da f differenzierbar ist, ergibt der Grenzwert $c \to x$

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x} \ .$$

Genauso erhält man für $c \to y$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \leq f'(y) \ .$$

Also $f'(x) \leq f'(y)$. Da $x < y$ beliebig war ist f' monoton steigend. Da f' differenzierbar ist, existiert der Grenzwert $t \to x$ von $(f'(t) - f'(x))/(t-x)$. Die Monotonie von f' zeigt, dass $(f'(t) - f'(x))/(t-x) \geq 0$ (man unterscheide $t < x$ und $t > x$), also gilt dies auch für den Grenzwert $f''(x)$.

5. [2P] Berechnen der zweiten Ableitung zeigt, dass x^2, e^x, e^{-x}, $-\log(x)$, $\cosh(x)$ konvex sind, nicht aber x^3, $\cos(x)$.

6. [2P] Wir schreiben $f(x) = a(b(c(d(x))))$ mit

$$a(x) = x^2 + x^4 \ , \quad b(x) = 1 + x \ , \quad c(x) = e^x \ , \quad d(x) = 1/x \ .$$

Die Funktionen a, b, c sind monoton steigend (erste Ableitung ≥ 0) und konvex (zweite Ableitung ≥ 0). Die Funktion d is konvex (zweite Ableitung ≥ 0). Nach Teil 2 ist $a(b(c(d(x))))$ konvex.

Aufgabe 73

Für $x = y = 0$ ist die Ungleichung offensichtlich erfüllt, wir nehmen also im Folgenden $x, y > 0$ an. Wir haben in Aufgabe 72 gesehen, dass $-\log(x)$ konvex ist. Also gilt

$$-\log(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq -\lambda \log(x) - (1-\lambda)\log(y) \ .$$

Für $\lambda = 1/p$ gilt $1 - \lambda = 1/q$, also

$$\log(x/p + y/q) \geq \log(x)/p + \log(y)/q = \log(x^{1/p}) + \log(y^{1/q}) \ .$$

Die Funktion exp ist monoton steigend, also gilt auch

$$x/p + y/q = \exp(\log(x/p + y/q)) \geq \exp(\log(x^{1/p}) + \log(y^{1/q})) = x^{1/p}\, y^{1/q} \ .$$