

Differentialgeometrie

Inhaltsverzeichnis

1	Kurven und Flächen	1
1.1	Kurven	1
1.2	Teilmannigfaltigkeiten	4
1.3	Der Tangentialvektorraum	6
1.4	Differenzierbare Abbildungen	7
1.5	Die innere Metrik	8
2	Elementare Krümmungstheorie	11
2.1	Die Krümmungsform	11
2.2	Kurven in TMF	13
2.3	Normalkrümmungen	13
2.4	Parallelflächen	15
2.5	Minimalflächen	16
3	Differenzierbare MF	19
3.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	19
3.2	Abbildungen	20
3.3	Vektorfelder	22
3.4	Tensorfelder	24
4	Riemannsche Geometrie	27
4.1	MF mit Riemannscher Metrik	27
4.2	Die kovariante Ableitung	28
4.3	Parallelverschiebung	31
4.4	Riemannsche Zshg.	32
4.5	Geodätische Linien	34
4.6	Variation der Energie	37
4.7	Vollständigkeit	38
4.8	Integration	39
5	Krümmung	41
5.1	Krümmungstensor	41
5.2	Wegabhängigkeit	42
5.3	Jacobi-Felder	45
5.4	Konjugierte Punkte	47
5.5	Riemannsche TMF	48
5.6	Der Integralsatz von Gauß-Bonnet	51
6	Anwendungen	55
6.1	Mechanik	55
6.2	Relativitätstheorie	57

1. Kapitel

Kurven und Flächen im Euklidischen Raum

1.1 Kurven

DEFINITION: KURVE, SCHMIEGRAUM, TANGENTE Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine C^r -Kurve ist eine r -mal stetig differenzierbare Abbildung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Der affine Unterraum $c(t) + [\dot{c}(t), \ddot{c}(t), \dots, c^{(k)}(t)]$ ist der k -Schmiegraum der Kurve c an der Stelle t . Der 1-Schmiegraum heißt Tangente. \triangleright

DEFINITION: PARAMETERWECHSEL Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\gamma : I' \rightarrow I$ ein Diffeomorphismus, dann entsteht $c' = c \circ \gamma$ aus c durch Parameterwechsel. \triangleright

Wir werden sehen, daß die Schmiegräume einer Kurve *geometrische Eigenschaften* sind. Wir werden diesen Begriff zunächst nur für Kurven definieren:

DEFINITION: TRANSFORMATIONSGRUPPE Eine Gruppe G wirkt auf einer Menge M als Transformationsgruppe, wenn es einen Homomorphismus \sim von G in die Gruppe der Bijektionen von M gibt: Für $g \in G$ ist $\tilde{g} : M \rightarrow M$. \triangleright

BEISPIEL: Die Gruppe G der euklidischen Kongruenztransformationen $x \mapsto A \cdot x + b$ (mit $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in O_n$) wirkt auf dem affinen Raum \mathbb{R}^n bzw. auf dem linearen Raum \mathbb{R}^n bzw. auf der reellen Zahlengeraden \mathbb{R} in der Form

$$\tilde{g}(x) = A \cdot x + b, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g}(x) = A \cdot x, \quad \text{bzw.} \quad \tilde{g}(x) = \det(A) \cdot x.$$

G wirkt auf jeder Menge in trivialer Weise durch $\tilde{g}(x) = x$. \diamond

DEFINITION: GEOMETRISCHE EIGENSCHAFT, INVARIANTE Wir nehmen an, daß ein Objekt $\mathfrak{B}(c, t) \in M$ einer Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einem Wert $t \in I$ zugeordnet wird. Die Gruppe G der euklidischen Kongruenztransformationen operiere auf M als Transformationsgruppe. \mathfrak{B} ist eine geometrische Eigenschaft bzw. Invariante der Kurve, wenn folgendes gilt:

1. Ist $c' = c \circ \gamma$ ein Parameterwechsel, so ist $\mathfrak{B}(c, \gamma(u)) = \mathfrak{B}(c', u)$, d.h. \mathfrak{B} ist invariant gegenüber einem Parameterwechsel.
2. Ist $g \in G$, so ist $\mathfrak{B}(g \circ c, t) = \tilde{g}(\mathfrak{B}(c, t))$. \triangleright

Für andere Transformationsgruppen oder für mehrere Parameterwerte ist der Begriff der 'geometrischen Eigenschaft' entsprechend zu modifizieren.

BEISPIEL: Wir betrachten die euklidische Kongruenztransformation $g : x \mapsto A \cdot x + b$. Sei \mathfrak{B} eine einer Kurve c zugeordnete geometrische Eigenschaft. Für bestimmte Typen von \mathfrak{B} versteht sich die Wirkung von G von selbst:

Ist \mathfrak{B} ein Punkt p des euklidischen Raumes, so ist $\mathfrak{B}(g \circ c) = A \cdot p + b$. Ist \mathfrak{B} ein Vektor v des linearen Raumes \mathbb{R}^n , so ist $\mathfrak{B}(g \circ c) = A \cdot v$. Ist \mathfrak{B} ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist $\mathfrak{B}(g \circ c) = \det(A) \cdot \lambda$, oder $\mathfrak{B}(g \circ c) = \lambda$. \diamond

SATZ 1.1 *Der Schmiegraum einer Kurve ist eine geometrische Eigenschaft.*

BEWEIS: Sei $c' = c \circ \gamma$. Aus der Kettenregel $\dot{c}' = \dot{c} \circ \gamma \cdot \dot{\gamma}$, $\ddot{c}' = \dots$ folgt, daß jeder Vektor aus $[\dot{c}', \ddot{c}', \dots, c'^{(k)}]$, ausgewertet an der Stelle t , eine Linearkombination von $\dot{c}, \ddot{c}, \dots, c^{(k)}$, ausgewertet an der Stelle $\gamma(t)$, ist. Aus $c = c' \circ \gamma^{-1}$ folgt die Umkehrung. Damit ist die lineare Hülle $[\dot{c}, \dots, c^{(k)}]$ invariant gegenüber Parametertransformationen.

Die Invarianz gegenüber Kongruenzabbildungen folgt aus der Vertauschbarkeit von linearen Abbildungen und Differentiation. \square

DEFINITION: BOGENLÄNGE, BOGENLÄNGENPARAMETER Die *Bogenlänge* der Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ im Intervall $[a, b]$ ist definiert durch

$$L_a^b(c) = \left| \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \right|.$$

Die Kurve c ist nach der Bogenlänge parametrisiert, wenn $\|\dot{c}\| = 1$ in I ist. Anschaulich heißt das, daß die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit eins durchlaufen wird. \triangleright

SATZ 1.2 *Die Bogenlänge $L_a^b(c)$ einer Kurve c ist eine geometrische Eigenschaft.*

BEWEIS: Sei $c' = c \circ \gamma$.

$$\begin{aligned} L_a^b(c') &= \left| \int_a^b \|\dot{c}'\| dt \right| = \left| \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\dot{c}(\gamma(t))\| dt \right| = \left| \int_a^b \|\dot{c}(\gamma(t))\|\dot{\gamma}(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \|\dot{c}\| dt \right| = L_{\gamma(a)}^{\gamma(b)}(c). \end{aligned}$$

Um für $g(x) = A \cdot x + b$ die Gleichheit $L(g \circ c) = L(c)$ zu zeigen, verwenden wir $\|d(g \circ c)/dt\| = \|A \cdot \dot{c}\|$. \square

BEMERKUNG: Für alle Kurven gibt es eine Parametertransformation γ , sodaß $c \circ \gamma$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist: Wir verwenden $\gamma^{-1}(t) = \text{sgn}(t - t_0)L_{t_0}^t(c)$.

SATZ 1.3 *Unter allen stückweise differenzierbaren Kurven, die 2 Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$ verbinden, sind genau die monoton parametrisierten Geraden die kürzesten.*

BEWEIS: o.b.d.A. ist $p = 0$ und $q = (d, 0, \dots, 0)$. Sei $c(0) = p$, $c(1) = q$. Dann ist $L_0^1(c) = \int_0^1 ((\dot{c}^1)^2 + \dots + (\dot{c}^n)^2)^{1/2} dt \geq \int_0^1 |\dot{c}^1| dt \geq \left| \int_0^1 \dot{c}^1 \right| = c^1(1) - c^1(0) = d$ mit Gleichheit genau für $\dot{c}^1 \geq 0$ und $\dot{c}^2 = \dots = \dot{c}^n = 0$, d.h. c^1 monoton, und $c^2 = \dots = c^n = \text{const} = 0$. \square

SATZ 1.4 *Die Bogenlänge einer Kurve ist das Supremum der Längen der eingeschriebenen Streckenzüge: $L_a^b(c) = \sup \sum \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\|$, wobei das Supremum über alle Unterteilungen $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$ genommen wird.*

BEWEIS: Wir bezeichnen die rechte Seite der Gleichung mit $\tilde{L}_a^b(c)$. Wegen Satz 1.3 ist $L_a^b \geq \tilde{L}_a^b$. Um sogar '=' zu zeigen, beachten wir $\tilde{L}_a^t + \tilde{L}_t^b = \tilde{L}_a^b$ für $a \leq t \leq b$:

$$\begin{aligned} \|c(t+h) - c(t)\| &\leq \tilde{L}_t^{t+h} \leq L_t^{t+h} \\ \Rightarrow \left\| \frac{c(t+h) - c(t)}{h} \right\| &\leq \frac{\tilde{L}_a^{t+h} - \tilde{L}_a^t}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\dot{c}(t)\| dt \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \tilde{L}_a^t \leq \|\dot{c}(t)\|$, d.h. \tilde{L} ist differenzierbar und seine Ableitung stimmt überein mit der von L . \square

DEFINITION: REGULARITÄT, HAUPTTYPKURVE, WENDEPUNKT Eine Kurve c ist *regulär*, wenn $\dot{c} \neq 0$ und eine *Haupttypkurve*, wenn $\dot{c}, \ddot{c}, \dots, c^{(n-1)}$ linear unabhängig sind.

c hat einen *Wendepunkt* bei $t = t_0$, wenn $\dot{c}(t_0), \ddot{c}(t_0)$ linear abhängig sind und $\dot{c}(t_0) \neq 0$ ist. ▷

DEFINITION: BEGLEITBASIS Durch das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren entsteht aus den Vektoren $\dot{c}, \dots, c^{(n-1)}$ im $(n-1)$ -Schmiegraum eine Orthonormalbasis $\{c_1, \dots, c_{n-1}\}$. Dann ist der Vektor c_n eindeutig bestimmt durch $\langle c_i, c_n \rangle = 0$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\det(c_1 \dots c_n) = 1$. Die Vektoren c_1, \dots, c_n heißen dann die *Begleitbasis* der Kurve c . ▷

Die Begleitbasis ist offenbar nur für Haupttypkurven definiert. Wir haben

$$c_j \in [\dot{c}, \dots, c^{(j)}] \implies \dot{c}_j \in [\ddot{c}, \dots, c^{(j+1)}] \subseteq [c_1, \dots, c_{j+1}], \text{ d.h.}$$

$$\dot{c}_j = \sum_{i=1}^n \omega_{ij} c_i \quad \text{mit } \omega_{ij} = 0 \text{ für } i > j + 1.$$

LEMMA 1.5 Die Matrix (ω_{jk}) ist schiefssymmetrisch und besitzt nur Nebendiagonaleinträge. Es ist $\omega_{j,j+1} > 0$ für $j \leq n-2$.

$$(\omega_{jk}) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_{n-1,n} & 0 \end{bmatrix}$$

BEWEIS: Die Begleitbasis ist eine ONB, also ist $\langle \dot{c}_j, c_k \rangle = \langle \sum \omega_{ij} c_i, c_k \rangle = \omega_{kj}$. Durch Ableiten von $\langle c_k, c_j \rangle = \text{const.}$ folgt $\langle \dot{c}_k, c_j \rangle + \langle c_k, \dot{c}_j \rangle = 0$. □

DEFINITION: KRÜMMUNG, ABLEITUNGSGLEICHUNGEN Die Größen $\kappa_i = \omega_{i,i+1} \cdot \|\dot{c}\|^{-1}$ heißen die *Krümmungen* der Kurve c . Mit $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ schreiben sich die Ableitungsgleichungen von Frenet-Serret in der Form

$$\begin{aligned} \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_1 &= \kappa_1 c_2 \\ \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_2 &= -\kappa_1 c_1 + \kappa_2 c_3 \\ &\vdots \\ \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_{n-1} &= -\kappa_{n-2} c_{n-2} + \kappa_{n-1} c_n \\ \|\dot{c}\|^{-1} \cdot \dot{c}_n &= -\kappa_{n-1} c_{n-1} \end{aligned} \quad \text{▷}$$

LEMMA 1.6 $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2}, |\kappa_{n-1}|$ sind geometrische Eigenschaften. Das Vorzeichen von κ_{n-1} ändert sich bei Orientierungsumkehrenden euklidischen Kongruenztransformationen, und bei Parametertransformation, bei denen die Durchlaufrichtung geändert wird, falls $n \equiv 1, 2 \pmod 4$.

SATZ 1.7 (HAUPTSATZ DER LOKALEN KURVENTHEORIE) Sind $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen mit $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-2} > 0, \kappa_j \in C^{n-1-j}, p \in \mathbb{R}^n, t_0 \in I$ und $c_{1,0}, \dots, c_{n,0}$ eine ONB des \mathbb{R}^n mit $\det(c_{1,0}, \dots, c_{n,0}) = 1$, dann existiert genau eine Kurve $c : \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit:

- c ist nach der Bogenlänge parametrisiert.
- $c(t_0) = p$, und die Begleitbasis von c bei $t = t_0$ stimmt mit der gegebenen Basis überein.
- $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ sind die Krümmungen von c .

Ändert man die Angabe so, daß die κ_i unverändert bleiben, erhält man eine euklidisch kongruente Kurve.

BEMERKUNG: VOLLSTÄNDIGES INVARIANTENSYSTEM Die Krümmungen einer Kurve (in Abhängigkeit von der Bogenlänge) bilden ein vollständiges Invariantensystem für Kurven im Euklidischen Raum.

BEISPIEL: FORMELN FÜR KRÜMMUNGEN Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, so ist

$$\dot{c} = \|\dot{c}\|c_1, \quad \ddot{c} = \|\dot{c}\|\dot{c}_1 + \|\dot{c}\|^2\kappa_1c_2 \implies \text{Area}(\dot{c}, \ddot{c}) = \|\dot{c}\|^3\kappa_1.$$

Dabei bedeutet 'Area(v, w)' die Fläche des Parallelogramms, das von v und w aufgespannt wird, und bei $n = 2$ sogar genauer die Determinante $\det(v, w)$. Wir haben die Beziehung $\text{Area}(v, w + \lambda v) = \text{Area}(v, w)$ verwendet. Explizite Formeln für κ_1 sind:

$$\mathbb{R}^2 : \kappa_1 = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3}, \quad \mathbb{R}^3 : \kappa_1 = \frac{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|}{\|\dot{c}\|^3}, \quad \mathbb{R}^n : \kappa_1 = \frac{\text{Area}(\dot{c}, \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3} \quad (n > 3),$$

Für $n > 2$ liefern die Frenetschen Ableitungsgleichungen weiter

$$\ddot{c} = (*)c_1 + (*)c_2 + \|\dot{c}\|^3\kappa_1(-\kappa_1c_1 + \kappa_2c_3).$$

Wir verwenden die Bezeichnung 'Vol(u, v, w)' für das Volumen des von den drei Vektoren u, v, w aufgespannten Parallelepipeds, und genauer $\det(u, v, w)$ im Fall $n = 3$. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}}) &= \text{Vol}(\|\dot{c}\|c_1, \|\dot{c}\|^2\kappa_1c_2, \|\dot{c}\|^3\kappa_1\kappa_2c_3) = \|\dot{c}\|^6 \left(\frac{\text{Area}(\dot{c}, \ddot{c})}{\|\dot{c}\|^3} \right)^2 \kappa_2, \\ \implies \kappa_2 &= \frac{\text{Vol}(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{\text{Area}(\dot{c}, \ddot{c})^2}; \quad \text{im } \mathbb{R}^3 : \kappa_2 = \frac{\det(\dot{c}, \ddot{c}, \ddot{\ddot{c}})}{\|\dot{c} \times \ddot{c}\|^2}. \end{aligned}$$

Mit der Bezeichnung G_r für das Volumen des von den Vektoren $\dot{c}, \dots, c^{(r)}$ aufgespannten Parallelepipeds [d.h. $G_r^2 = \det((c^{(j)}, c^{(k)})_{j,k=1}^r)$ für $r < n$ und $G_n = \det(\dot{c}, \dots, c^{(n)})$] ist $\|\dot{c}\|\kappa_j = G_{j-1}G_{j+1}/G_j^2$ für $2 < j < n$ (Beweis durch Induktion). \diamond

1.2 Teilmannigfaltigkeiten

DEFINITION: DIFFERENZIERBARE ABBILDUNG, DIFFERENTIAL Eine Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt r -mal stetig differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen bis zur r -ten Ordnung existieren und stetig sind. Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\frac{\partial^k f^j(u^1, \dots, u^n)}{\partial u^{r_1} \dots \partial u^{r_k}} = f_{,u^{r_1} \dots u^{r_k}} = f_{,r_1 \dots r_k}.$$

Ist $c : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c} = v = (\dot{c}^1, \dots, \dot{c}^m)$, dann heißt die Abbildung df_p von Vektorräumen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$df_p(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\dot{c}^1(t), \dots, \dot{c}^m(t)) = \frac{\partial f}{\partial u^1} \dot{c}^1(0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial u^m} \dot{c}^m(0)$$

das Differential der Abbildung f im Punkt p . \triangleright

Wie aus der Formel ersichtlich, ist df_p wohldefiniert, d.h. df hängt nicht von der Wahl der Kurve c ab. Wir nennen df_p regulär, wenn es als lineare Abbildung regulär ist, d.h. $\ker(df_p) = 0$, und f regulär, falls df regulär ist. Der Rang von df bei p ist $\text{rg}(df_p) = \dim(df_p(\mathbb{R}^n))$.

DEFINITION: DIFFEOMORPHISMUS Eine Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ein Diffeomorphismus, wenn f differenzierbar, umkehrbar, und f^{-1} ebenfalls differenzierbar ist. \triangleright

SATZ 1.8 (SATZ VON DER UMKEHRFUNKTION) Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bei $p \in \mathbb{R}^n$ regulär, dann existiert eine Umgebung V von p , sodaß $f : V \rightarrow f(V)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir sagen, daß f ein lokaler Diffeomorphismus ist.

Was läßt uns die Oberfläche einer Kugel als ein 'glattes' und 'zweidimensionales' Gebilde ansehen? Wir verwenden hier eine Definition, die versucht, den anschaulichen Begriff zu exaktifizieren. Eine m -dimensionale Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist eine Teilmenge, die sich durch einen Diffeomorphismus lokal in einen Unterraum deformieren, d.h. 'geradebiegen' läßt:

DEFINITION: TEILMANNIGFALTIGKEIT $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Teilmannigfaltigkeit* (kurz TMF) der Dimension $m \leq n$, wenn für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U_p \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\varphi_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, sodaß $\varphi_p(M \cap U_p) = (\mathbb{R}^m \times 0) \cap \varphi_p(U_p)$. Die φ_p heißen Karten von M . Die Menge aller Karten $\{\varphi_p | p \in M\}$ heißt ein Atlas von M . \triangleright

BEISPIEL:

- Der \mathbb{R}^n ist eine n -dimensionale Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n , weil wir die identische Funktion als Karte verwenden können.
- Jede offene Teilmenge U einer n -dim. TMF ist wieder eine n -dim. TMF — wir müssen nur die Kartenabbildungen auf U einschränken.
- Viele differenzierbare Abbildungen $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ erzeugen Teilmannigfaltigkeiten (siehe weiter unten). \diamond

Als sehr nützliches Werkzeug zum Arbeiten mit TMF stellt sich der folgende Rangsatz heraus: Hat eine Abbildung lokal konstanten Rang, so läßt sie sich in eine Projektion deformieren:

SATZ 1.9 (RANGSATZ) Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^s$ und hat f in einer Umgebung von $p \in \mathbb{R}^n$ konstanten Rang r , so gibt es Umgebungen V von p und W von $f(p)$, sowie Diffeomorphismen $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$, sodaß $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ die folgende Gestalt besitzt:

$$\tilde{f} : \varphi(V) \rightarrow \psi(W), \quad \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir durch Verkleinern von V und W stets erreichen, daß φ und ψ surjektiv sind. Die Bilder von differenzierbaren Abbildungen können TMF sein:

FOLGERUNG: Hat $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ konstanten Rang r , dann ist $f(U)$ lokal eine r -dim. TMF des \mathbb{R}^m , d.h. für alle $p \in U$ existiert eine Umgebung $V_p \subseteq U$, so daß $f(V_p)$ eine TMF ist. \square

Damit ist insbesondere eine reguläre Kurve lokal eine TMF. Die Urbilder von Punkten unter differenzierbaren Abbildungen können TMF sein:

FOLGERUNG: Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ von konstantem Rang r , so ist $f^{-1}(a)$ eine $(n - r)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n für alle $a \in \mathbb{R}^m$. \square

BEISPIEL: SPHÄRE Die 2-Sphäre hat die Form $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$ ist vom Rang 1. Damit ist $S^2 = f^{-1}(1)$ eine 2-dim. TMF des \mathbb{R}^3 .

Analog ist $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ eine $(n-1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n . \diamond

LEMMA 1.10 Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, und $a \in \mathbb{R}^m$, df_x surjektiv für alle $x \in f^{-1}(a)$, dann ist $f^{-1}(a)$ eine $(m-n)$ -dim. TMF.

1.3 Der Tangentialvektorraum

Um auf Teilmannigfaltigkeiten über Ableitungen sprechen zu können, benötigt man den Begriff des Tangentialvektors an eine TMF, der differenzierbaren Abbildung, und des Differentials.

Wir definieren Tangentialvektoren an TMF als Tangentialvektoren an Kurven in der TMF:

DEFINITION: TANGENTIALVEKTOR, TANGENTIALVEKTORRAUM Ein Tangentialvektor an eine Teilmannigfaltigkeit M ist ein Tangentialvektor (im \mathbb{R}^m) an eine Kurve $c : I \rightarrow M$. Ist $c(t_0) = p$ and $\dot{c}(t_0) = v$, dann ist (p, v) ein Tangentialvektor an M im Punkt p .

Die Menge der Tangentialvektoren im Punkt p heißt Tangentialvektorraum $T_p M$ in p . Die Vereinigung aller $T_p M$ heißt das Tangentialbündel TM von M . \triangleright

LEMMA 1.11 Ist M eine n -dimensionale TMF des \mathbb{R}^m , dann ist $T_p M$ ein n -dim. Unterraum von $T_p \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^m$. Ist $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte mit $\varphi(W \cap M) = \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^n \times 0) \subset \mathbb{R}^m$, dann ist $T_p M = d\varphi_{\varphi^{-1}(p)}^{-1}(T_{\varphi(p)}(\mathbb{R}^n \times 0)) = d\varphi^{-1}(\{(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)\})$.

LEMMA 1.12 Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $f(U) = M$ eine r -dim. TMF (d.h. $\text{rg}(df) = r$), dann ist $T_{f(p)} M = df_p(T_p \mathbb{R}^n)$.

Ist $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $M = f^{-1}(a)$ eine r -dim. TMF (d.h. $\text{rg}(df) = n-r$), so ist $T_p(M) = \ker(df_p)$.

FOLGERUNG: Hat $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ den Rang 1 für alle x mit $f(x) = a$, so ist $f^{-1}(a)$ eine $(n-1)$ -dim. TMF, deren Tangentialvektorraum die Gleichung $\text{grad}_p(f) \cdot x = 0$ besitzt. \square

Das folgende Beispiel zeigt, daß einige bekannte Mengen von Matrizen Teilmannigfaltigkeiten sind:

BEISPIEL: MATRIZENGRUPPEN Die Gruppen $O_n, SO_n, GL_n \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ sind wie folgt definiert:

- $GL_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}$;
- $O_n = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \cdot A^T = E\}$, wobei E die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix ist.
- $SO_n = \{A \in O_n \mid \det(A) = 1\} = \{A \in O_n \mid \det(A) > 0\}$.

GL_n ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n \times n}$ und somit eine n^2 -dim. TMF. Sei $f : GL_n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, A \mapsto AA^T$. Dann ist

$$\begin{aligned} df_A(V) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(A + tV) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (AA^T + tV^T A + tA^T V + t^2 V^T V) \\ &= V^T A + A^T V = (A^T V)^T + (A^T V). \end{aligned}$$

Offenbar ist df_A eine surjektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^{n \times n}$ in den $n(n+1)/2$ -dim. Unterraum der symmetrischen Matrizen. Damit ist

$$\text{rg}(df_A) = \frac{1}{2}n(n+1) \implies \dim O_n = n^2 - \text{rg}(df_A) = \frac{1}{2}n(n-1),$$

und O_n ist eine Teilmannigfaltigkeit. SO_n ist eine offene Teilmenge von O_n (bestimmt durch die Ungleichung $\det(A) > 0$), also ist sie eine $\dim(O_n)$ -dim. TMF von O_n und somit eine TMF von $\mathbb{R}^{n \times n}$. Die Tangentialvektorräume $T_A O_n$ und $T_A SO_n$ haben die Gleichung $df_A(V) = 0$, also $V^T A + A^T V = 0$. Insbesondere ist $T_E O_n = T_E SO_n = \{V \mid V^T + V = 0\}$. \diamond

1.4 Differenzierbare Abbildungen von Teilmannigfaltigkeiten

Um Abbildungen zwischen TMF betrachten zu können, definieren wir die Koordinatendarstellung von Abbildungen.

DEFINITION: LOKALE PARAMETRISIERUNG Ist $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine n -dimensionale TMF und $g : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ regulär und injektiv — z.B. für eine Karte $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei $g = \varphi^{-1}|_{\mathbb{R}^n \times 0}$. Dann heißt g lokale Parametrisierung von M . \triangleright

DEFINITION: KOORDINATENDARSTELLUNG Seien $g_i : U_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i} \rightarrow M_i$ ($i = 1, 2$) lokale Parametrisierungen der TMF M_1 und M_2 .

Dann heißt $\tilde{f} : U_1 \rightarrow U_2$, $\tilde{f} = g_2^{-1} \circ f \circ g_1$ die *Koordinatendarstellung* von f , bzgl g_1, g_2 . \triangleright

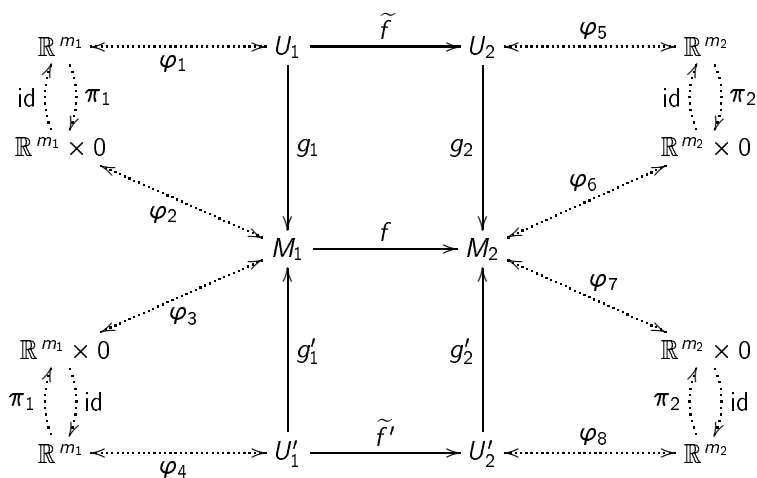
DEFINITION: DIFFERENZIERBAR, DIFFERENTIAL Seien M_1, M_2 wie oben. Eine Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ heißt differenzierbar, wenn alle Koordinatendarstellungen differenzierbar sind. Das *Differential* df_p von f bei p ist definiert durch

$$df_p(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (c), \quad \text{wobei } c : I \rightarrow M, \quad c(0) = p, \quad \dot{c}(0) = v. \quad \triangleright$$

SATZ 1.13 Die Differenzierbarkeit einer Abbildung von Teilmannigfaltigkeiten ist ein wohldefinierter Begriff, d.h. er hängt nicht von einer speziellen Wahl der g_i ab. $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$ ist wohldefiniert, und ist eine lineare Abbildung. Es ist

$$df_p = dg_2 \circ d\tilde{f}|_{\mathbb{R}^{m_1} \times 0} \circ (dg_1)^{-1}.$$

BEWEIS: Nach dem Rangsatz existieren lokale Diffeomorphismen $\varphi_1, \dots, \varphi_8$ und Projektionen π_1, π_2 , sodaß das folgende Diagramm kommutativ ist:



□

LEMMA 1.14 Sind φ_1 und φ_2 Karten für M_1, M_2 um p und $f(p)$, und $\tilde{f} = \varphi_2^{-1} \circ f \circ \varphi_1$, so ist

$$df_p = (d\varphi_{2,f(p)})^{-1} \circ d\tilde{f}|_{\mathbb{R}^{m_1 \times 0}} \circ d\varphi_{1,p}|_{T_p M}.$$

SATZ 1.15 Ist $f : M \rightarrow N$ differenzierbar und $f(M) \subseteq L$, wobei $L \subseteq N$ TMF ist, dann ist auch $f : M \rightarrow L$ differenzierbar. Ist $f : M \rightarrow L$ differenzierbar, dann ist auch $f : M \rightarrow N$ differenzierbar.

SATZ 1.16 Der Satz über die Umkehrfunktion gilt auch für differenzierbare TMF. D.h. wenn $\dim M = \dim N$, $f : M \rightarrow N$ und df_p regulär ist, dann existiert eine Umgebung von p , sodaß f dort bijektiv und f^{-1} differenzierbar ist.

Ist $f : U \subseteq M \rightarrow n$ differenzierbar und hat konstanten Rang r , so ist $f^{-1}(U)$ eine $(\dim(M) - r)$ -dim. TMF von M .

BEISPIEL: STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION Wir wollen eine Parametrisierung der 2-Sphäre $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ betrachten: $g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$, $g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$:

$$g_1(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ 1 - \|x\|^2 \end{bmatrix}, \quad g_2(u, v) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \\ \|x\|^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Da $\frac{\partial g_i}{\partial u}, \frac{\partial g_i}{\partial v}$ für $i = 1, 2$ linear unabhängig sind, sind g_1 und g_2 lokale Parametrisierungen von S^2 . Identifizieren wir $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ mittels $z = x_1 + ix_2$, dann ist g_1 die wohlbekannte Einbettung von \mathbb{C} in die Riemannsche Zahlenkugel. Die Parameterwechsel zwischen g_1 und g_2 haben dann die folgende Gestalt:

$$g_1 \circ g_2^{-1} = g_2 \circ g_1^{-1} : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0, \quad z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}.$$

Sei $f : S^2 \rightarrow S^2$ gegeben durch die Abbildungsvorschrift $(0, 0, 1) = N \mapsto N$, und die Koordinatendarstellung bezüglich g_1 und g_1 :

$$g_1^{-1} \circ f \circ g_1(z) = p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n,$$

d.h. $f(g_1(z)) = g_1(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n)$. f hat die besondere Eigenschaft, daß Punkte des Zielgebietes von von g_1 wieder auf solche Punkte abgebildet werden. Offenbar ist $f|_{S^2 \setminus N}$ beliebig oft differenzierbar.

Ist auch f differenzierbar? Dazu betrachten wir die Koordinatendarstellung von f bzgl. g_2 und g_2 :

$$g_2 \circ f \circ g_2^{-1} = (g_2 \circ g_1^{-1}) \circ (g_1 \circ f \circ g_1^{-1}) \circ (g_1 \circ g_2^{-1}) : \mathbb{C} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C} \setminus 0, \\ z \mapsto 1/\overline{p(1/\bar{z})} = \frac{z^n}{\bar{a}_n z^n + \dots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0}$$

für $z \neq 0$ und $0 \mapsto 0$. Demnach ist f auf ganz S^2 beliebig oft differenzierbar. \diamond

1.5 Die innere Metrik einer Teilmannigfaltigkeit

DEFINITION: INNERE METRIK, I. FUNDAMENTALFORM Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dim. TMF und sei \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ versehen. Für $v, w \in T_p M$ ist $\langle v, w \rangle$ somit wohldefiniert, weil $T_p M \subseteq T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. Die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in $T_p M$ heißt auch I. Fundamentalform der Teilmannigfaltigkeit M im euklidischen Raum. \triangleright

Man kann einen Tangentialvektor als Richtungsableitung interpretieren. In diesem Zusammenhang schreiben wir Tangentialvektoren in der Form $X_p \in T_pM$.

DEFINITION: RICHTUNGSABLEITUNG Ist $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X_p$, und ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist

$$X_p f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ c(t)$$

die Richtungsableitung von f in Richtung X_p . ▷

DEFINITION: VEKTORFELD Ein Vektorfeld auf einer TMF M ist eine Abbildung $X : M \rightarrow TM \subset \mathbb{R}^{2n}$ mit $p \mapsto X_p \in T_pM$. ▷

BEISPIEL: BASISFELD Ist g eine lokale Parametrisierung (z.B. $(\varphi|_{\mathbb{R}^m \times 0})^{-1}$ für eine Karte φ), dann heißt

$$\partial_j : p \mapsto dg_p(e_j) = \partial_j(p) = (\partial_j)_p$$

das j -te *Basisfeld* bezüglich der Parametrisierung g . ◇

DEFINITION: KOEFFIZIENTEN DER METRIK Ist $g : \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$ eine lokale Parametrisierung und sind $\partial_1, \dots, \partial_n$ die dazugehörigen Basisfelder, dann heißen die Funktionen

$$g_{jk} : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_{jk}(p) = \langle \partial_j(p), \partial_k(p) \rangle$$

die zugehörigen *Koeffizienten* der inneren Metrik bzw. der I. Fundamentalform.¹ ▷

Haben Tangentialvektoren die Koordinaten $v = v^j \partial_j$, $w = w^k \partial_k$, so ist $\langle v, w \rangle = \sum_{j,k} v^j w^k \langle \partial_j, \partial_k \rangle = v^j w^k g_{jk}$.

DEFINITION: ABSTANDSFUNKTION Sei M eine wegzusammenhängende TMF. Seien $p, q \in M$, und sei $\mathcal{C}_{p,q}$ die Menge aller stückweise differenzierbaren Kurven $c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$. Dann ist der *Abstand* von p, q definiert durch

$$d(p, q) := \inf_{c \in \mathcal{C}_{p,q}} L_0^1(c) \quad \triangleright$$

LEMMA 1.17 $d(p, q)$ ist eine Metrik in M , d.h.:

- (1) $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$
- (2) $d(p, q) = d(q, p)$
- (3) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$

BEWEIS: (1) folgt aus Satz 1.3, der Rest ist trivial. □

Ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung von einem topologischen Raum in die reellen Zahlen, so verwenden wir die Bezeichnung $\text{supp}(f)$ für den Abschluß von $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.

DEFINITION: OBERFLÄCHENINTEGRAL Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dim. TMF und $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung. Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und \tilde{f} die Koordinatendarstellung von f bezüglich g . Ist $\text{supp}(f)$ kompakt und in $f(U)$, dann sei

$$\int_M f dO := \int_U \tilde{f}(u_1, \dots, u_m) \sqrt{\det(g_{jk})} du_1 \cdots du_m \quad \triangleright$$

¹Historische Bezeichnungen für $g_{11}, g_{12} = g_{21}, g_{22}$ sind E, F, G .

LEMMA 1.18 $\int_M f dO$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Parametrisierung.

In der Definition der Oberflächenintegrals tritt die Determinante der metrischen Koeffizienten g_{jk} als Verzerrungsfaktor auf: Hat eine ONB das Volumen 1, so ist das Volumen des von den Vektoren v_1, \dots, v_n aufgespannten Parallelepipeds gleich

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| = \det(\langle v_i, v_j \rangle)^{1/2}.$$

DEFINITION: VOLUMEN Sei $g : U \rightarrow M$ wie oben und $K \subseteq U$ kompakt. Dann ist

$$\text{Vol}(g(K)) := \int_K \sqrt{\det(g_{jk})} du_1 \dots du_m$$

das Volumen von $g(K) \subseteq M$. \triangleright

DEFINITION: ISOMETRIE Seien M, N Teilmannigfaltigkeiten $f : M \rightarrow N$. Dann heißt f Isometrie, falls $d(p, q) = d(f(p), f(q))$ für alle $p, q \in M$ gilt. \triangleright

BEISPIEL: Sind $g : U \rightarrow M$, $g' : U \rightarrow N$ lokale Parametrisierungen und stimmen die Koeffizienten g_{jk} und g'_{jk} überein, dann ist $f : g(U) \rightarrow g'(U)$, $p \mapsto g' \circ g^{-1}(p)$ eine Isometrie, denn für eine Kurve $c : I \rightarrow U$ sind die Bogenlängen von $g \circ c$ und $g' \circ c$ gleich.

Sei z.B. $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $N = \mathbb{R}^2$, $U = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$. Wähle $g : (u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$ und $g'(u, v) = (u, v)$. Dann ist

$$(g_{jk}) = (g'_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $g^{-1} \circ f$ eine Isometrie, und man kann den Zylinder ohne die Gerade $x = -1, y = 0$ isometrisch in die Ebene abbilden, was auch der 'Alltagserfahrung' mit Zylindern entspricht. \diamond

2. Kapitel

Elementare Krümmungstheorie der $(n - 1)$ -dim. Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

2.1 Die Krümmungsform

DEFINITION: KREUZPRODUKT Das aus dem \mathbb{R}^3 bekannte Kreuzprodukt von Vektoren wird im \mathbb{R}^n durch die folgende symbolische Determinante definiert (e_1, \dots, e_n sind die Vektoren der kanonischen ONB):

$$\times \dots \times : (\mathbb{R}^n)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x_1 \times \dots \times x_{n-1} := \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_{n-1}^1 & e_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & e_n \end{vmatrix} \triangleright$$

Das Kreuzprodukt ist orthogonal auf x_1, \dots, x_{n-1} , es ergänzt x_1, \dots, x_{n-1} zu einer positiv orientierten Basis (falls x_1, \dots, x_{n-1} linear unabhängig sind), und $\|x_1 \times \dots \times x_{n-1}\|$ ist gleich dem Volumen des von x_1, \dots, x_{n-1} aufgespannten Parallelepipeds.

Das wichtigste Hilfsmittel in der elementaren Krümmungstheorie der Flächen ist die sphärische Abbildung und die von ihr abgeleiteten Begriffe. Sie ordnet jedem Punkt einer $(n - 1)$ -dim. TMF einen normierten Einheitsvektor orthogonal zu $T_p M$ zu:

DEFINITION: SPHÄRISCHE ABBILDUNG Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $(n - 1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n und $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist $n : M \rightarrow S^{n-1}$ definiert durch

$$\tilde{n}(p) := \partial_1 \times \partial_2 \times \dots \times \partial_{n-1}, \quad n(p) = \frac{\tilde{n}(p)}{\|\tilde{n}(p)\|}.$$

Dabei bilden die Vektoren $\partial_1, \dots, \partial_{n-1}, n$ ein Rechtssystem. $n(p)$ heißt der durch g bestimmte Einheits-Normalvektor von M in p . \triangleright

n ist von der Parametrisierung abhängig: Ist g' eine andere Parametrisierung und n' das damit verbundene Einheits-Normalvektorfeld, so ist

$$n = n' \iff (\partial_1, \dots, \partial_{n-1}, n) \text{ und } (\partial'_1, \dots, \partial'_{n-1}, n) \text{ sind gleich orientiert.}$$

DEFINITION: WEINGARTENABBILDUNG, SHAPE-OPERATOR Sei M eine $(n - 1)$ -dim. TMF. Dann ist $dn_p : T_p M \rightarrow T_p S^{n-1}$. Die Tangentialvektorräume $T_p S^{n-1}$ und $T_p M$ sind im \mathbb{R}^n parallel zueinander und haben die gleiche Dimension. Wir identifizieren sie und definieren die Weingartenabbildung (englisch: 'shape operator'):

$$\sigma_p : T_p M \rightarrow T_p S^{n-1} \cong T_p M, \quad v \mapsto -dn(v) \quad \triangleright$$

Die Weingartenabbildung gibt also die negative Änderung des Normalvektors $n(p)$ in Richtung v an. Das Vorzeichen hat historische Gründe. σ ist von der Parametrisierung in derselben Weise abhängig wie n .

DEFINITION: KRÜMMUNGSFORM, II. FUNDAMENTALFORM Die Abbildung

$$h_p : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}, (v, w) \mapsto \langle \sigma_p(v), w \rangle$$

heißt *Krümmungsform* oder *II. Fundamentalform*. Die skalaren Funktionen

$$h_{jk} : M \rightarrow \mathbb{R}, h_{jk}(p) = h_p(\partial_j, \partial_k) = \langle \sigma_p(\partial_j), \partial_{k,p} \rangle$$

heißen die Koeffizienten der II. Fundamentalform.¹ ▷

Die Koordinatenmatrix der Weingartenabbildung σ_p bezüglich der Basis $\partial_1, \dots, \partial_k$ in $T_p M$ wird mit h_j^k bezeichnet. Es gilt

$$\sigma(\partial_k) = h_j^k \partial_j, \quad h_{jk} = \langle h_j^l \partial_l, \partial_k \rangle = h_j^l g_{lk} \implies h_{jk} = g^{kl} h_j^l.$$

Dabei ist $(g^{kl}) = (g_{jk})^{-1}$ die zur Matrix (g_{jk}) inverse Matrix.

SATZ 2.1 Die Krümmungsform ist eine symmetrische Bilinearform.

BEWEIS: Wir leiten $\langle \partial_j, n \rangle = 0$ längs der u^k -Linie ab:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial g}{\partial u^j}, n \right\rangle = 0 &\implies \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k}, n \right\rangle + \left\langle \frac{\partial g}{\partial u^j}, \frac{\partial n}{\partial u^k} \right\rangle = 0 \\ &\implies h_{jk} = - \left\langle \frac{\partial n}{\partial j}, \frac{\partial g}{\partial k} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial g}{\partial u^j \partial u^k}, n \right\rangle = h_{kj} \quad \square \end{aligned}$$

Die II. Fundamentalform ist von der Parametrisierung in derselben Weise abhängig wie n .

FOLGERUNG: Nach dem Spektralsatz hat $T_p M$ somit eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von σ und alle Eigenwerte von σ sind reell. □

DEFINITION: HAUPTKRÜMMUNGEN, MITTLERE KR., GAUSSSCHE KR. Die $n - 1$ reellen Eigenwerte $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ von σ heißen *Hauptkrümmungen* von M im Punkt p . Jeder Eigenvektor bestimmt eine *Hauptkrümmungsrichtung*. Die mittlere Krümmung H und die Gaußsche Krümmung K sind definiert durch

$$H = \frac{1}{n-1}(\kappa_1 + \dots + \kappa_{n-1}) = \frac{1}{n-1} \text{tr}(\sigma), \quad K = \kappa_1 \cdots \kappa_{n-1} = \det(\sigma) \quad \triangleright$$

Die Hauptkrümmungen, H , und bei $\dim(M) \equiv 1 \pmod{2}$ auch K sind von der Parametrisierung in derselben Weise abhängig wie n . Bei $\dim(M) \equiv 0 \pmod{2}$ ist K eine geometrische Eigenschaft der Teilmannigfaltigkeit.

BEMERKUNG: GEOMETRISCHE EIGENSCHAFT 'geometrische Eigenschaft' bzw. 'Invariante' ist hier analog zu Def. 1.1 definiert — ein einer Teilmannigfaltigkeit zugeordneter Skalar bzw. affiner Unterraum ändert sich nicht bei Kongruenztransformationen bzw. wird entsprechend transformiert. An die Stelle der Invarianz bei Parametertransformationen tritt die Unabhängigkeit von einer Parametrisierung bzw. Karte.

¹Historische Bezeichnungen für $h_{11}, h_{12} = h_{21}, h_{22}$ sind L, M, N .

2.2 Die Krümmungen von Kurven in Teilmannigfaltigkeiten

DEFINITION: NORMALKRÜMMUNG, GEODÄTISCHE KRÜMMUNG Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine $(n-1)$ -dim. TMF und $c : I \rightarrow M$ nach der Bogenlänge parametrisiert (d.h. $\|\dot{c}\| = 1$ und $\ddot{c} = \dot{c}_1 = \kappa_1 c_2$). Dann ist

$$\ddot{c} = \kappa_n n + \kappa_g m \text{ mit } m \in T_p M, \|m\| = 1, \langle n, m \rangle = 0.$$

κ_n heißt *Normalkrümmung* und κ_g heißt *geodätische Krümmung* der Kurve c in M . Aus der Definition folgt direkt, daß $\kappa_g^2 + \kappa_n^2 = \kappa_1^2$ gilt. \triangleright

LEMMA 2.2 Für eine Kurve $c : I \rightarrow M$ ist

$$\kappa_n = h(\dot{c}, \dot{c}) / \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle,$$

d.h. die Normalkrümmung hängt nur von \dot{c} ab.

BEWEIS: Wir parametrisieren c nach der Bogenlänge, dabei geht \dot{c} in $\dot{c}/\|\dot{c}\|$ über. Es genügt daher, den Satz für solche Kurven zu zeigen: Betrachte das Normalvektorfeld $n \circ c(t)$ längs der Kurve c und leite $0 = \langle \dot{c}, n \rangle$ ab: $0 = \langle \ddot{c}, n \rangle + \langle \dot{c}, dn(\dot{c}) \rangle = \kappa_n \langle n, n \rangle + \kappa_g \langle m, n \rangle + \langle \dot{c}, dn(\dot{c}) \rangle = \kappa_n - h(\dot{c}, \dot{c})$. \square

Bewegt sich ein Teilchen innerhalb einer TMF M , an die es aufgrund irgendwelcher Zwangsbedingungen gebunden ist, so hat es wegen $\kappa_n = h(\dot{c}, \dot{c}) / \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$ auf die Komponente der Beschleunigung normal zur Fläche nur über seine eigene Geschwindigkeit einen Einfluß. Innerhalb der Newtonschen Mechanik übt M eine Kraft aus, die der Normalbeschleunigung $\|\dot{c}\|^2 \kappa_n = \ddot{c}^n$ das Gleichgewicht hält. Die geodätische Krümmung kann das Teilchen unabhängig von seiner Geschwindigkeit selbst bestimmen.

DEFINITION: KRÜMMUNGSKREIS Der Kreis mit dem Mittelpunkt $c(t) + \frac{1}{\kappa_1} c_2(t)$ und Radius $\frac{1}{\kappa_1}$, der in der von c_1 und c_2 aufgespannten Ebene liegt, heißt *Krümmungskreis*. \triangleright

Die Kurve c und ihr Krümmungskreis haben in ihrem Berührungspunkt die gleichen Tangenten und die gleichen Krümmungen. Sind beide nach der Bogenlänge parametrisiert, so stimmen nach Frenet die Ableitungen bis zur 2. Ordnung überein.

SATZ 2.3 (SATZ VON MEUSNIER) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$. Berühren einander zwei Kurven $c, \tilde{c} : I \rightarrow M$ im Punkt $p = c(0) = \tilde{c}(0)$ mit $\kappa_n(\dot{c}) \neq 0$, so schneiden die Achsen ihrer Krümmungskreise einander im Punkt $p + \kappa_n^{-1} n$.

2.3 Die Verteilung der Normalkrümmungen

DEFINITION: DUPINSCHER INDIKATRIX Die Teilmengen i_- und i_+ von $T_p M$:

$$i_{\pm} = \left\{ \frac{v}{\sqrt{\pm \kappa_n(v)}} \mid \|v\| = 1 \right\} = \left\{ \frac{v}{\sqrt{\pm h(v, v)}} \right\} = \{w \mid h(w, w) = \pm 1\}$$

heißen die *Dupinschen Indikatrices* von M im Punkt p . \triangleright

Daß die drei Definitionen äquivalent sind, ist für die ersten beiden trivial, und folgt für die 2. und 3. aus

$$h\left(\frac{v}{\sqrt{h(v, v)}}, \frac{v}{\sqrt{h(v, v)}}\right) = \frac{h(v, v)}{h(v, v)} = 1, \quad h(w, w) = 1 \implies w = \frac{w}{\sqrt{h(w, w)}}.$$

Sei im Tangentialraum $T_p M$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren der Abbildung $\sigma_p = -dn$ (Krümmungsvektoren) gegeben. v_1, \dots, v_{n-1} seien die Koordinaten eines Tangentialvektors bezüglich dieser Basis und $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ seien die Hauptkrümmungen. Dann ist

$$h(v, v) = \langle v, \sigma_p(v) \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \kappa_1 v_1 \\ \vdots \\ \kappa_{n-1} v_{n-1} \end{bmatrix} \right\rangle = \kappa_1 v_1^2 + \dots + \kappa_{n-1} v_{n-1}^2.$$

Im Fall einer 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit des euklidischen \mathbb{R}^3 hat die Indikatrix die Gleichung $i_{\pm} : \kappa_1 v_1^2 + \kappa_2 v_2^2 = \pm 1$. Man unterscheidet die folgenden Fälle:

1. elliptischer Punkt: $\kappa_1 \kappa_2 > 0$. Eine Indikatrix ist eine Ellipse und die andere ist leer.
2. hyperbolischer Punkt: $\kappa_1 \kappa_2 < 0$. Die beiden Indikatrizen sind 'zueinander konjugierte' Hyperbeln mit Haupt- und Nebenachsen $|\kappa_1|^{-1/2}, |\kappa_2|^{-1/2}$.
3. parabolischer Punkt: $\kappa_1 = 0, \kappa_2 \neq 0$ oder umgekehrt. Die Indikatrizen haben die Gleichungen $i_{\pm} : \kappa_2 v_2^2 = \pm 1$. Eine besteht aus 2 parallelen Geraden, die andere ist leer.
4. Flachpunkt: $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. $i_+ = i_- = \{\}$.

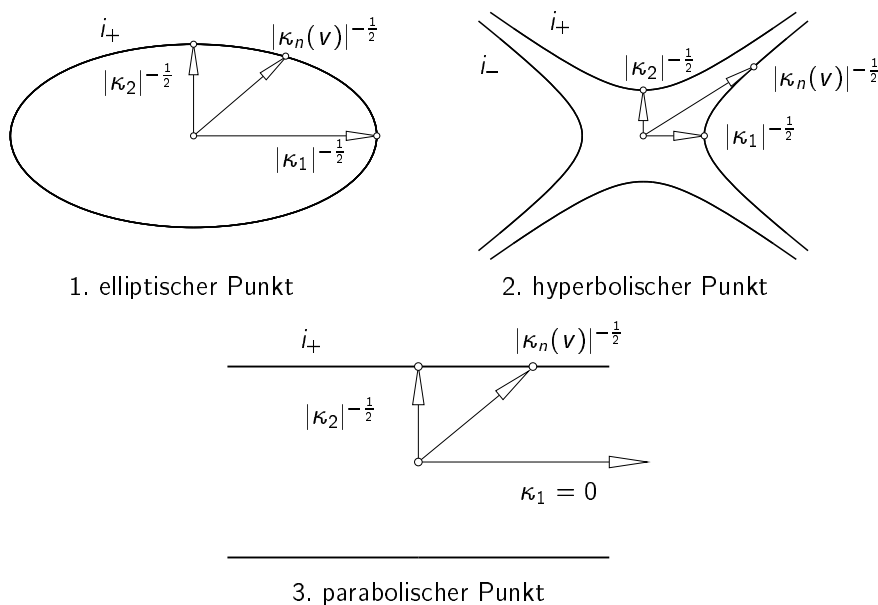


Abbildung 2.1: Beispiele für Dupinsche Indikatrizen

LEMMA 2.4 Jede $(n-1)$ -dim. TMF M des \mathbb{R}^n ist lokal der Graph einer skalaren Funktion $f : \mathbb{R}^{(n-1)} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. in einem geeigneten Koordinatensystem wird M durch $(u_1, \dots, u_{n-1}) \mapsto (u_1, \dots, u_{n-1}, f(u_1, \dots, u_{n-1}))$ parametrisiert.

BEWEIS: Sei $g : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung mit $g(0) = p$. Wähle ein Koordinatensystem des \mathbb{R}^n so, daß $p = 0$ und $T_p M = \mathbb{R}^{n-1} \times 0 \subset \mathbb{R}^n$. Sei $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ die Orthogonalprojektion. Definiere $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$, $\varphi = \pi \circ g$. Dann ist $d\varphi = d\pi \circ dg$. Wegen $d\pi|_{T_p M} = \text{id}$ hat $d\varphi$ lokal den Rang $n - 1$ und φ ist lokal diffeomorph. Setze $\bar{g} := g \circ \varphi^{-1}$. Nach Konstruktion ist \bar{g} eine lokale Parametrisierung von M und hat die Gestalt $\bar{g}(u^1, \dots, u^{n-1}) = (u^1, \dots, u^{n-1}, f(u^1, \dots, u^{n-1}))$. \square

Das hier konstruierte f hat die Eigenschaft $\frac{\partial f}{\partial u^i}(0) = 0$ für alle i (denn $\frac{\partial \bar{g}}{\partial u^i}$ muß tangential an $T_p M$ sein).

DEFINITION: SCHMIEG-PARABOLOID Sei \bar{g} die lokale Parametrisierung aus Lemma 2.3. Das Taylorpolynom 2. Ordnung von \bar{g} parametrisiert das Schmiege-Paraboloid von M im Punkt p :

$$u = (u^1, \dots, u^{n-1}) \mapsto [u^1, \dots, u^{n-1}, \frac{1}{2} u^T \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \right) \cdot u]. \quad \triangleright$$

Sind die Basisvektoren in $T_p M$ Krümmungsvektoren, und sind κ_i die dazugehörigen Hauptkrümmungen, so ist die Gleichung des Schmiegeparaboloids

$$x_n = \frac{1}{2} (\kappa_1 x_1^2 + \dots + \kappa_{n-1} x_{n-1}^2).$$

Die Dupinschen Indikatrizien (Abb. 2.1) stellen offenbar horizontale Schnitte durch Schmiegeparaboloid dar. Die Gleichung der Dupischen Indikatrix in einem Koordinatensystem wie in Lemma 2.3 ist

$$u^T \cdot \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \right) \cdot u = h(u, u) = \pm 1.$$

FOLGERUNG: Ist M eine kompakte $(n - 1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n , so hat $\|x\|^2$ ein Maximum $r = \|p\|$ für ein $p \in M$. Dann hat $T_p M$ die Gleichung $\langle x, p \rangle = 0$. In p kann M einen elliptischen Punkt besitzen, sonst bleibt M nicht im Inneren der Kugel mit Radius r und Mitte 0. Daraus folgt, daß jede kompakte $(n - 1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n einen Punkt besitzt, wo alle Hauptkrümmungen gleiches Vorzeichen haben (bei $n = 3$: $K > 0$). \square

2.4 Parallellflächen und die abtragende Abbildung

Das Konzept der Parallellfläche (bzw. der tubularen Umgebung) ist ein wichtiges technisches Hilfsmittel. Wir werden hier nur den Fall von $(n - 1)$ -dimensionalen TMF eines \mathbb{R}^n betrachten.

DEFINITION: ABTRAGENDE ABBILDUNG Sei M eine $(n - 1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n , $g : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, und $n : M \rightarrow S^{n-1}$ das dazugehörige Einheits-Normalvektorfeld. Dann heißt

$$e : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, (p, t) \mapsto p + tn(p)$$

die *abtragende Abbildung*. \triangleright

Die Koordinatendarstellung von e bezüglich der lokalen Parametrisierung $g \times \text{id}$ von $M \times \mathbb{R}$ ist

$$\tilde{e} : U \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (a, t) \mapsto g(a) + t \cdot n(g(a)).$$

Um die Definition des Produktes von Mannigfaltigkeiten zu vermeiden, werden wir, wenn von Differenzierbarkeit u. ä. die Rede ist, immer \tilde{e} und nicht e meinen.

LEMMA 2.5 e ist regulär (d.h. \tilde{e} ist regulär) an der Stelle (p, t) genau dann, wenn t^{-1} keine Hauptkrümmung von M in p ist.

Man könnte sagen, daß in einem Hauptkrümmungsmittelpunkt 'infinitesimal benachbarte Normalen einander schneiden'.

LEMMA 2.6 Sei $B \subseteq U$ offen und \overline{B} kompakt. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodaß $e|_{B \times (-\varepsilon, \varepsilon)}$ ein Diffeomorphismus ist. Das Bild $e(B \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ heißt dann eine tubulare Umgebung von $g(\overline{B})$, und das Bild von $e(B \times \lambda)$ heißt Parallellfläche von $g(B)$ im Abstand λ . Für $|\lambda| < \varepsilon$ ist sie eine TMF des \mathbb{R}^n .

DEFINITION: VARIATION IN NORMALENRICHTUNG Seien M, g, n, e wie oben. Sei $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann parametrisiert

$$g^\varepsilon : U \rightarrow \mathbb{R}^n, g^\varepsilon(a) = \tilde{e}(a, \varepsilon \varphi(a)) = g(a) + \varepsilon \varphi(a) n(g(a))$$

eine Variation von $g(U)$ in Normalenrichtung. ▷

LEMMA 2.7 Seien M, g, n und φ wie in der obigen Definition. Ist $B \subseteq U, \overline{B}$ kompakt, dann sind für hinreichend kleine ε die Variationen von $g(B)$ in Normalenrichtung Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n .

2.5 Minimalflächen

DEFINITION: MINIMALFLÄCHE Eine $(n-1)$ -dim. TMF des \mathbb{R}^n heißt Minimalfläche, wenn ihre mittlere Krümmung verschwindet. ▷

Für verschiedene Zwecke ist eine erweiterte Definition notwendig (z.B. mehrere TMF mit Rand, die längs ihrer Ränder zusammenhängen), auf die wir hier nicht eingehen wollen.

SATZ 2.8 (VARIATION DER OBERFLÄCHE) Sei $g : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Parametrisierung einer TMF des \mathbb{R}^n , $B \subseteq U \subseteq \overline{B}$ und \overline{B} kompakt. Sei ferner $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi|_{\partial B} = 0$ gegeben. Dann gilt:

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \text{Vol}(g^\varepsilon(\overline{B})) = \int_{\overline{B}} (1-n) \cdot \varphi \cdot H \, dO$$

Die Variation der Oberfläche verschwindet für alle Variationen in Normalenrichtung genau für $H = 0$ in \overline{B} .

Dieser Satz liefert eine Begründung für die Bezeichnung 'Minimalfläche'. In der Natur kommen Minimalflächen als Seifenhäute vor: Eine solche Seifenhaut ist bestrebt,

- die innere Spannung der Fläche zu minimieren, d.h. in jedem Punkt wird, bildlich gesprochen, 'in alle Richtungen gleich stark gezogen' — das heißt $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$;
- und die Oberfläche zu minimieren, d.h. die Bedingungen von Satz 2.8 zu erfüllen.

BEMERKUNG: Auch bei $H = 0$ gilt nicht immer, daß $\text{Vol}(g(\overline{B})) \leq \text{Vol}(g^\varepsilon(\overline{B}))$, d.h. das Volumen hat nicht notwendigerweise ein Minimum an der Stelle $\varepsilon = 0$.

DEFINITION: PLATEAUSCHES PROBLEM Unter dem *Plateauschen Problem* versteht man, zu einer gegebenen geschlossenen Raumkurve eine Minimalfläche zu finden, deren Rand die gegebene Kurve ist. \triangleright

DEFINITION: ISOTHERME PARAMETRISIERUNG $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt *isotherme Parametrisierung* einer 2-dim. TMF, falls

$$g_{jk}(p) = \begin{pmatrix} \gamma(p)^2 & 0 \\ 0 & \gamma(p)^2 \end{pmatrix}$$

ist, d.h. wenn $dg_u : T_u\mathbb{R}^2 \rightarrow T_{g(u)}M$ eine Ähnlichkeit mit dem Faktor $\gamma(g(u))$ ist. \triangleright

BEISPIEL: Die Umkehrung $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ der stereographischen Projektion ist ein Beispiel für eine isotherme Parametrisierung.

Ist M eine Minimalfläche, so ist das Differential dn der spärischen Abbildung $n : M \rightarrow S^2$ eine Ähnlichkeit (die Eigenwerte sind $\kappa_1, \kappa_2 = -\kappa_1$, und die Eigenvektoren sind orthogonal zueinander). Ist $K \neq 0$, so ist n lokal umkehrbar, und $n^{-1} \circ s$ ist lokal eine isotherme Parametrisierung der Minimalfläche \diamond

SATZ 2.9 Jede zweidimensionale TMF des \mathbb{R}^3 besitzt lokal eine isotherme Parametrisierung.

BEWEIS: siehe M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. IV, pp. 455–500. \square

SATZ 2.10 Ist $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine isotherme Parametrisierung einer TMF, so gilt:

$$H = 0 \iff g^1, g^2, g^3 \text{ sind analytisch,}$$

d.h. $g^i = \operatorname{Re}(\omega^i)$ mit $\omega^i : I \times iJ \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiters gilt

$$\sum_i \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial z} \right)^2 = 0.$$

FOLGERUNG: Eine Minimalfläche läßt sich in der Umgebung eines Punktes in der Form $\operatorname{Re}(\omega(z))$ mit $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$, ω^i holomorph, $\sum_i \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial z} \right)^2 = 0$ parametrisieren. Umgekehrt erhält man für jedes solche ω eine Minimalfläche. \square

DEFINITION: BJÖRLINGSCHES PROBLEM Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ analytisch und sei $v : I \rightarrow S^2$ analytisch. Gesucht ist eine Minimalfläche, die die Kurve $c(t)$ enthält und im Punkt $c(t)$ den Normalvektor $v(t)$ besitzt. \triangleright

SATZ 2.11 (LÖSUNG DES BJÖRLINGSCHEN PROBLEMS) Seien $c(z)$ und $v(z)$ die analytischen Fortsetzungen von $c(t)$ und $v(t)$ in ein einfach zusammenhängendes Gebiet $I \times iJ \subseteq \mathbb{C}$, und sei $u_0 \in I$. Dann hat das Björlingsche Problem die Lösung

$$\omega(z) = c(z) - i \int_{u_0}^z v(\zeta) \times \dot{c}(\zeta) d\zeta$$

3. Kapitel

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Dieses und die folgenden Kapitel sind so geschrieben, daß der Begriff der abstrakten 'differenzierbaren Mannigfaltigkeit' in Kap. 3.1 definiert wird, der Text ab Kap. 3.3 jedoch so gestaltet ist, daß man jederzeit für 'Mannigfaltigkeit' auch 'Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ' einsetzen kann.

3.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Bisher betrachteten wir Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n . Der umgebende Raum stellte uns Ableitungsvektoren, den Tangentialvektorraum, ein Skalarprodukt und Normalvektoren zur Verfügung. Wir wollen nun abstrakte differenzierbare Mannigfaltigkeiten betrachten, die nicht notwendigerweise in einem \mathbb{R}^n eingebettet liegen.

DEFINITION: KLEBEABBILDUNGEN, KLEBEDATEN Seien $\{U_i \mid i \in I\}$ offene Teilmengen des \mathbb{R}^n und $\varphi_{ij} : U_i \rightarrow U_j$ Diffeomorphismen von offenen Teilmengen von U_i auf offenen Teilmengen von U_j mit $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}^{-1}$, $\varphi_{ik} = \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}$ überall dort, wo definiert, und $\varphi_{ii} = \text{id}_{U_i}$. Dann heißen die φ_{ij} *Klebeabbildungen*, und die Gesamtheit der U_i mit den Klebeabbildungen nennt man *Klebe-Daten*. \triangleright

BEISPIEL: Wir können uns eine offene Überdeckung einer Fläche durch Kartenumgebungen vorstellen, mit $\varphi_i : V_i \subseteq M \rightarrow U_i$. Die Abbildungen $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ erfüllen dann die Bedingungen dieser Definition. \diamond

Wir betrachten die Relation

$$x \sim y : \iff \exists i, j \in I \text{ mit } x \in U_i, y \in U_j, \varphi_{ij}(x) = y.$$

' \sim ' ist offenbar eine Äquivalenzrelation.

BEISPIEL: (Fortsetzung) In diesem Beispiel ist ' \sim ' nichts anderes als die Gleichheits-Relation für Punkte in M . Die offenen Mengen V_i bzw. U_i sind durch die Abbildungen φ_{ij} aneinandergesetzt. \diamond

Hier gehen wir den umgekehrten Weg: wir starten von offenen Mengen U_i , und definieren eine abstrakte Mannigfaltigkeit durch Zusammenkleben:

DEFINITION: DIFFERENZIERBARE MANNIGFALTIGKEIT, KARTE Seien (U_i) , (φ_{ij}) Klebedaten und ' \sim ' die dadurch definierte Äquivalenzrelation. Sei M die Menge der Äquivalenzklassen von ' \sim '.

Die natürlichen Abbildungen $\varphi_i : M \rightarrow U_i$ heißen *Karten*, und ihre Umkehrungen heißen *lokale Parametrisierungen* von M . Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt *offen*, wenn alle $\varphi_i(U) \subset U_i$ offen sind.

Die Menge M heißt *differenzierbare Mannigfaltigkeit* der Dimension n , falls die dadurch bestimmte Topologie¹ Hausdorffsch² und parakompakt³ ist. \triangleright

BEMERKUNG: Eine alternative Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist die folgende: M sei ein parakompakter Hausdorffraum, $\varphi_i : M \rightarrow U_i$ seien Homöomorphismen, deren Definitionsgebiete M überdecken, und $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ seien Diffeomorphismen.

BEMERKUNG: Die Forderung an die Topologie, Hausdorffsch zu sein, schließt das 'verkehrte Zusammenkleben' der Kartenumgebungen aus.

BEISPIEL: Verkleben wir $U_1 = (0, 2)$ und $U_2 = (4, 6)$ mittels $\varphi_{1,2} : (1, 2) \rightarrow (4, 5)$, $\varphi_{1,2}(x) = x + 3$, so erhalten wir eine differenzierbare Mannigfaltigkeit homöomorph zum Intervall $(0, 3)$.

Verkleben wir $U_1 = (0, 2)$ und $U_2 = (5, 7)$ mittels $\varphi_{1,2} : (1, 2) \mapsto (6, 7)$, $\varphi_{1,2}(x) = x + 5$, so ist M kein Hausdorff-Raum, weil jede Umgebung von $[1]_{\sim}$ mit jeder Umgebung von $[6]_{\sim}$ einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. \diamond

LEMMA 3.1 Ist M eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und sind $\tilde{\varphi}_j$ Kartenabbildungen (lokale Diffeomorphismen) in den \mathbb{R}^n , so setzen wir $U_j = \tilde{\varphi}_j(M \cap \tilde{V}_j)$, und $\varphi_{ij} = \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1}|_{U_j}$. Die Abbildungen φ_{ij} sind Diffeomorphismen.

FOLGERUNG: Offenbar entsteht durch Verkleben der U_j mit Hilfe der Abbildungen φ_{ij} ein topologischer Raum homöomorph zu M . M ist daher eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. \square

3.2 Tangentialvektoren, Abbildungen von Mannigfaltigkeiten

Ab jetzt wollen wir auch für k -dimensionale TMF M des \mathbb{R}^n den Begriff einer Karte (außer dort, wo es explizit erwähnt wird) so verstehen, daß durch die Kartenabbildung φ_j eine offene Teilmenge von M auf eine offene Teilmenge U_j des \mathbb{R}^k abgebildet wird. Wir finden solche Karten durch Einschränken der 'alten' TMF-Karten auf M .

Im Folgenden sind (falls nicht anders erwähnt) M und N immer differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit den Karten $(U_j, \varphi_j)_{(j \in J)}$ und $(U'_k, \varphi'_k)_{(k \in K)}$.

DEFINITION: KOORDINATENDARSTELLUNG Seien $f : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ bzw. $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ bzw. $f : M \rightarrow N$ Abbildungen. Dann heißen $\varphi'_k \circ f$ bzw. $f \circ \varphi_j^{-1}$ bzw. $\varphi'_k \circ f \circ \varphi_j^{-1}$ die Koordinatendarstellungen von f bezüglich der Karten φ_j, φ'_k . \triangleright

DEFINITION: DIFFERENZIERBAR (AUF EINER MF) $f : \mathbb{R}^k \rightarrow M$ bzw. $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ bzw. $f : M \rightarrow N$ heißt *differenzierbar* (oder C^r), falls die Koordinatendarstellung von f differenzierbar (oder C^r) ist. \triangleright

SATZ 3.2 Die Differenzierbarkeit auf einer MF ist ein wohldefinierter Begriff, d.h. er hängt nicht von der speziellen Wahl der Karten ab. Für TMF stimmen die hier definierten Begriffe mit den früher definierten überein.

¹Daß durch diese Definition von 'offenen Mengen' tatsächlich eine Topologie bestimmt ist, ist eine leichte Übungsaufgabe.

²D.h. zu je zwei Punkten gibt es disjunkte offene Umgebungen

³Jede offene Überdeckung besitzt eine lokal-endliche Verfeinerung. Wir werden diese Eigenschaft außer beim Beweis von Satz 4.28 (zu dem sie ohnedies äquivalent ist) nicht benötigen.

Wollen wir Tangentialvektoren und Tangentialräume von abstrakten Mannigfaltigkeiten definieren, so stellt sich nun das Problem, daß wir keinen umgebenden Raum zur Verfügung haben, der uns in natürlicher Weise die Ableitung zur Verfügung stellt.

DEFINITION: KURVE, TANGENTIALVEKTOR Eine differenzierbare Abbildung $c : I \rightarrow M$ heißt *Kurve*. Wir wählen eine Karte φ um p . Ein *Tangentialvektor* an M im Punkt p ist eine Äquivalenzklasse von Kurven bezüglich der Äquivalenzrelation

$$c \approx \bar{c} : \iff p = c(0) = \bar{c}(0) \text{ und } \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi \circ c) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi \circ \bar{c}).$$

Die Menge der Tangentialvektoren in p wird mit $T_p M$ bezeichnet. Die Vereinigung der $T_p M$ ist das Tangentialbündel TM von M . ▷

Wir schreiben $X_p = v := \dot{c}(0)$ für den durch c bestimmten Tangentialvektor und $d\varphi(X_p) = d\varphi(v) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi \circ c$ für dessen Koordinatendarstellung bzgl. einer Karte φ . Speziell bezeichnen wir mit ∂_j den Tangentialvektor, dessen Koordinatendarstellung gleich dem j -ten kanonischen Basisvektor e_j des \mathbb{R}^n ist.

DEFINITION: RICHTUNGSABLEITUNG Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $X_p = \dot{c}(0) \in T_p M$. Die *Richtungsableitung* in Richtung X_p ist definiert als

$$X_p(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ c(t) \quad \triangleright$$

LEMMA 3.3 Für die Richtungsableitung gilt $X_p(f + g) = X_p(f) + X_p(g)$ und $X_p(fg) = (X_p f) \cdot g(p) + f(p)X_p(g)$.

LEMMA 3.4 Sind $X_p, Y_p \in T_p M$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gibt es eindeutig bestimmte Tangentialvektoren $X_p + Y_p$ und $\lambda \cdot X_p$ mit

$$(X_p + Y_p)f = X_p f + Y_p f \quad (\lambda \cdot X_p)f = \lambda \cdot X_p f$$

Ist $\dim(M) = n$, so ist $(T_p M, \mathbb{R}, +, \cdot)$ ein n -dim. Vektorraum. Ist φ eine Karte, so ist $d\varphi$ ein VR-Isomorphismus. Die durch eine Karte definierten Tangentialvektoren $\partial_1, \dots, \partial_n$ sind eine Basis von $T_p M$.

BEWEIS: Gehört X_p zur Kurve $c(t)$ mit der Koordinatendarstellung $(c^1(t), \dots, c^n(t))$ und analog Y_p zu $d(t)$ mit $(d^1(t), \dots, d^n(t))$, so gehört $X_p + Y_p$ zur Kurve mit der Koordinatendarstellung $(c^1 + d^1, \dots, c^n + d^n)$ und $\lambda \cdot X_p$ zur Kurve mit der Koordinatendarstellung $(\lambda \cdot c^1, \dots, \lambda \cdot c^n)$. Offenbar ist $d\varphi(X_p) + d\varphi(Y_p) = d\varphi(X_p + Y_p)$ und $d\varphi(\lambda X_p) = \lambda d\varphi(X_p)$. □

DEFINITION: DIFFERENTIAL EINER ABBILDUNG Das Differential df_p bzw. $df(p)$ einer Abbildung $f : M \rightarrow N$ im Punkt p ist gegeben durch $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, X \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ c$. Das Differential von f ist dann eine Abbildung $df : TM \rightarrow TN$ mit der Eigenschaft $T_p M \xrightarrow{df} T_{f(p)} N$. ▷

LEMMA 3.5 Das Differential ist wohldefiniert, d.h. es hängt nicht von der Wahl der Kurve c ab. $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ ist eine lineare Abbildung. Ist $\tilde{f} = \varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ die Koordinatendarstellung von f bezüglich zweier Karten $\varphi : M \rightarrow U, \varphi' : N \rightarrow U'$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{df} & TN \\ d\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ TU & \xrightarrow{d\tilde{f}} & TU' \end{array}$$

kommutativ (d.h. die Koordinatendarstellung des Differentials ist gleich dem Differential der Koordinatendarstellung).

FOLGERUNG: 'Alle lokalen Aussagen' über differenzierbare Abbildungen $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gelten auch für $f : M \rightarrow N$ (z.B. der Satz über die Umkehrfunktion und der Satz über implizite Funktionen). \square

Die Klebeabbildungen φ_{ij} sind hier immer C^∞ . Wären sie nur C^r (und M damit eine ' C^r -Mannigfaltigkeit'), so wäre die Differenzierbarkeit von Abbildungen aus und nach M nur bis zu C^r sinnvoll definierbar. Abgesehen von der größeren Bequemlichkeit von C^∞ -Mannigfaltigkeiten kann man zeigen, daß es keinen Sinn macht, endliche Differenzierbarkeit zuzulassen — man erhält dieselben Mannigfaltigkeiten, nur mit 'ungeschickter gewählten' Karten:

SATZ 3.6 Für jede differenzierbare C^r -Mannigfaltigkeit M gibt es eine differenzierbare C^∞ -Mannigfaltigkeit M' und einen C^r -Diffeomorphismus von M auf M' .

BEWEIS: Siehe Munkres: "Elementary Differential Topology", Princeton Univ. Press, 1961. \square

Bei Teil-Mannigfaltigkeiten ist es sinnvoll, endliche Differenzierbarkeiten zuzulassen. Eine C^r -TMF des \mathbb{R}^n ist aber immer eine C^r -Einbettung einer C^∞ -Mannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^n :

DEFINITION: IMMERSION, EINBETTUNG $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Immersion*, wenn df regulär ist, d.h. wenn jedes $df(p)$ regulär ist. $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Einbettung*, falls df regulär, f injektiv, und f^{-1} stetig ist. \triangleright

SATZ 3.7 Ist M kompakt und ist $f : M \rightarrow N$ injektiv und regulär, dann ist f eine Einbettung.

BEWEIS: z.z.: $U \in M$ offen $\implies f(U)$ offen. Sei also U offen $\implies M \setminus U$ abgeschlossen $\implies M \setminus U$ kompakt $\implies f(M \setminus U)$ kompakt $\implies f(M \setminus U)$ abgeschlossen $\implies f(U)$ offen. \square

SATZ 3.8 Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Einbettung, so ist $f(M)$ eine differenzierbare TMF diffeomorph zu M .

SATZ 3.9 (SATZ VON H. WHITNEY) Für alle n -dim. differenzierbaren MF mit höchstens abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten existiert eine Immersion in den \mathbb{R}^{2n-1} und eine Einbettung in den \mathbb{R}^{2n} .

3.3 Vektorfelder und Integralkurven

DEFINITION: VEKTORFELD Eine Abbildung $X : M \rightarrow TM$ mit $X(p) \in T_p M$ heißt *Vektorfeld*, wenn sie differenzierbar ist. Dabei heißt differenzierbar, daß die Koordinatendarstellung $d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$ bezüglich einer Karte φ differenzierbar ist. \triangleright

Ist φ eine Karte, so sind durch φ die Vektorfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$ bestimmt. Hat das Vektorfeld X bezüglich der Karte φ die Koordinatendarstellung $(x^1(u), \dots, x^n(u))$ mit $u \in U \subset \mathbb{R}^n$, so ist offenbar

$$X = \sum_{i=1}^n x^i \partial_i = x^i \partial_i.$$

Hier haben wir die Einsteinsche Summenkonvention verwendet.

DEFINITION: LIE-KLAMMER Sind $X = x^j \partial_j$ und $Y = y^j \partial_j$ Vektorfelder, dann heißt das Vektorfeld

$$[X, Y] := (x^j \partial_j y^k - y^j \partial_j x^k) \partial_k$$

die Lie-Klammer (oder Poisson-Klammer) von X und Y . ▷

Man beachte, daß $\partial_j y^k$ die Richtungsableitung der Funktion y^k längs der i -ten Koordinate bedeutet.

LEMMA 3.10 Die Lie-Klammer hat die folgenden Eigenschaften:

1. $[X, Y]f = XYf - YXf$, d.h. der Differentialoperator 2. Ordnung $X \circ Y - Y \circ X$ ist in Wahrheit eine Richtungsableitung längs des Vektorfeldes $[X, Y]$.
2. $[\partial_i, \partial_j] = 0$, d.h. die Basisfelder kommutieren,
3. $[X, Y] = -[Y, X]$ und $[X, X] = 0$ (Antisymmetrie)
4. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (die Jacobi-Identität).

Aus (i) folgt, daß $[X, Y]$ wohldefiniert ist und nicht von der Auswahl einer Karte abhängt.

BEWEIS: (i) zeigt man in Koordinaten und Einsetzen in die Definition. (i) \implies (ii) ist der Satz von H. A. Schwarz, (i) \implies (iii) ist trivial, und (i) \implies (iv) folgt durch Einsetzen und Ausrechnen. □

DEFINITION: INTEGRALKURVE, FLUSS Ist $X : M \rightarrow T_p M$ ein Vektorfeld und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $\dot{c}(t) = X_{c(t)}$, so heißt c Integralkurve von X . Ist c Integralkurve mit $c(0) = X$, dann heißt $Fl_X^t(p) = Fl_X(p, t) := c(t)$ der Fluß von X . ▷

SATZ 3.11 Zwei Integralkurven mit gleichen Anfangsbedingungen (Punkt und Ableitungsvektor) stimmen überein. Für alle $x \in M$ existieren eine offenen Umgebung $U \subseteq M$ und ein $\varepsilon > 0$, sodaß $Fl_X^t(y)$ für alle $y \in U$ und $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ definiert ist. Fl_X ist differenzierbar in beiden Variablen.

LEMMA 3.12 Ist $c(t)$ Integralkurve, so ist $\tilde{c}(t) := c(t + t_0)$ ebenfalls Integralkurve, falls definiert.

$$\implies Fl_X^s \circ Fl_X^t(p) = Fl_X^{s+t}(p) \text{ falls definiert}$$

SATZ 3.13 Seien X, Y Vektorfelder in M , und $\varphi : M \rightarrow U$ eine Karte. Die Koordinatendarstellungen von Vektorfeldern (sie sind Vektorfelder in U) seien mit $\widetilde{}$ bezeichnet. Dann gilt:

$$\varphi(Fl_X^t \circ Fl_Y^s(p)) - \varphi(Fl_Y^s \circ Fl_X^t(p)) = st \widetilde{[X, Y]}_p + \dots,$$

und es kommen in der Taylorreihe nur gemischte Glieder vor.

BEWEIS: Für $s = 0$ oder $t = 0$ ergibt sich 0, also kommen nur gemischte Glieder in der Taylorreihe vor. Den Koeffizient bei st erhält man durch Nachrechnen in Koordinaten. □

LEMMA 3.14 Seien X, Y Vektorfelder in M . Dann ist

$$[X, Y] = 0 \iff Fl_X^t \circ Fl_Y^s = Fl_Y^s \circ Fl_X^t$$

BEWEIS: '←=' folgt aus Satz 3.13. Um die Umkehrung zu zeigen, leiten wir die Aussage dieses Satzes nach s ab, und beachten $\frac{\partial}{\partial s} \text{Fl}_X^s(p) = X_p$. O.B.d.A. betrachten wir Vektorfelder in einer offenen Umgebung des \mathbb{R}^n (und verwenden id als Karte).

$$\begin{aligned} \text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s(p) - \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t(p) &= st[X, Y]_p + \dots & \left| \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \\ \implies d\text{Fl}_X^t(Y_p) - Y_{\text{Fl}_X^t(p)} &= 0 \end{aligned}$$

d.h. Fl_X^t führt das Vektorfeld Y in das Vektorfeld Y über, und führt daher dessen Integralkurven in dessen Integralkurven über: Ist $c(s)$ die Integralkurve von Y mit $c(0) = p$, so ist $\text{Fl}_X^t \circ c(s)$ die Integralkurve von Y durch $\text{Fl}_X^t(p)$, d.h. $\text{Fl}_X^t \circ \text{Fl}_Y^s(p) = \text{Fl}_Y^s \circ \text{Fl}_X^t(p)$. \square

3.4 Tensorfelder

Wir haben bisher verschiedenen Abbildungen definiert, die Tangentialvektoren als Argumente besitzen (z.B. das Skalarprodukt auf einer Fläche im \mathbb{R}^n , oder das Differential einer Abbildung). Um diese verschiedenen Abbildungen einheitlich behandeln zu können, definieren wir den Begriff des Tensorfeldes auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.

DEFINITION: LINEARFORM, MULTILINEARFORM Ist $f : V^n \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Argument linear (d.h. es gilt $f(x_1, \dots, \lambda x_i + \mu y_i, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \mu f(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$), so heißt f eine Multilinearform. Die Menge der Multilinearformen bildet einen Vektorraum, der mit $\otimes^n V^*$ oder $\mathfrak{L}_n(V)$ bezeichnet wird. \triangleright

BEISPIEL: Der Dualraum von V besteht aus den Linearformen auf V , und es ist $V^* = \mathfrak{L}_1 V$. Vertraute Elemente von $\mathfrak{L}_2 V$ sind die Bilinearformen und Skalarprodukte. \diamond

Ein Vektor $x \in V$ kann als Linearform auf dem Dualraum V^* interpretiert werden: Sein Wert $x(a^*)$ auf einer Linearform a^* ist definiert durch $a^*(x)$. Eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow V$ kann als bilineare Abbildung auf dem Produkt $V \times V^*$ interpretiert werden: Ist $x \in V$, $a^* \in V^*$, so ist $L(x, a^*)$ definiert durch $a^*(Lx)$. Das führt zu der folgenden, allgemeineren Definition:

DEFINITION: TENSOR Eine multilineare Abbildung $V^r \times (V^*)^s \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein Tensor der Stufe (r, s) , oder ein r -fach kovarianter, s -fach kontravarianter Tensor. Der Vektorraum dieser Abbildungen wird mit $\otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s V$ oder $\mathfrak{L}_{r,s}^f V$ bezeichnet. \triangleright

BEISPIEL: Linearformen, Bilinearformen, Vektoren, und lineare Endomorphismen sind Tensoren der Stufen $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, und $(1,1)$. \diamond

DEFINITION: TENSORPRODUKT Sind g_1, g_2 Tensoren der Stufen (r_1, s_1) und (r_2, s_2) , so ist der Tensor $g_1 \otimes g_2$ der Stufe $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ definiert durch

$$g_1 \otimes g_2(x_1 \dots, y_1 \dots, a_1^* \dots, b_1^* \dots) = g_1(x_1 \dots, a_1^* \dots) g_2(y_1 \dots, b_1^* \dots). \quad \triangleright$$

BEMERKUNG: BASIS, KOORDINATEN Sei e_1, \dots, e_n eine Basis in V und e^{1*}, \dots, e^{n*} die dazu duale Basis (d.h. $e^{i*}(e_j) = \delta_{ij}$). Dann bilden die n^{r+s} Multilinearformen

$$e^{i_1*} \otimes \dots \otimes e^{i_r*} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}$$

eine Basis von $\mathfrak{X}_s^r V$. Eine Multilinearform $g \in \mathfrak{X}_s^r V$ kann man in der Form

$$g = \sum g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} e^{i_1*} \otimes \dots \otimes e^{i_r*} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_s}$$

schreiben. $g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$ heißen die *Koordinaten* von g . Man erhält sie durch Auswerten von A auf den Basisvektoren von V und V^* :

$$g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} = g(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1*}, \dots, e^{j_s*}).$$

Das Auswerten von g auf r Vektoren x_1, \dots, x_r mit Koordinaten $(x_1^{i_1}), \dots, (x_r^{i_r})$ (jeweils $i_k = 1, \dots, n$) und s Linearformen a^{1*}, \dots, a^{s*} mit Koordinaten $(a_{j_1}^1), \dots, (a_{j_s}^s)$ (jeweils $j_k = 1, \dots, n$), erfolgt durch

$$g(x_1, \dots, a_1^*, \dots) = \sum g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \cdot x_1^{i_1} \dots x_r^{i_r} \cdot a_{j_1}^1 \dots a_{j_s}^s.$$

Beim Rechnen mit Tensoren gilt die Einsteinsche Summenkonvention: Es wird über jeden Index, der einmal oben und einmal unten vorkommt, von 1 bis n summiert. In der obigen Summe könnte man das Summenzeichen also auch weglassen.

Die Koordinaten eines Produkts sind offenbar gleich den Produkten der einzelnen Koordinaten: Haben $g, h, g \otimes h$ die Koordinaten $g_{\dots}, h_{\dots}, k_{\dots}$, so ist

$$k_{i_1, \dots, i_{r_1+r_2}}^{j_1, \dots, j_{s_1+s_2}} = g_{i_1, \dots, i_{r_1}}^{j_1, \dots, j_{s_1}} h_{i_{r_1+1}, \dots, i_{r_1+r_2}}^{j_{s_1+1}, \dots, j_{s_1+s_2}}.$$

DEFINITION: SYMMETRISCHE TENSOREN, ALTERNIERENDE TENSOREN Eine Multilinearform $g \in \mathfrak{X}_r(V)$ ist symmetrisch, wenn ihr Wert nicht von der Reihenfolge der Argumente abhängt. Sie ist alternierend, wenn für eine Permutation $\sigma : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ gilt

$$g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}) = \text{sgn}(\sigma) \cdot g(v_1, \dots, v_r). \quad \triangleright$$

DEFINITION: ALTERNANTE, KEILPRODUKT Für Multilinearformen g, g_1, \dots, v_r ist die Alternante $\mathfrak{A}(g)$ und das Keilprodukt $g_1 \wedge \dots \wedge g_r$ definiert durch

$$\mathfrak{A}(g)(v_1, \dots, v_r) = \sum_{\sigma \in S_r} \text{sgn} \sigma g(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(r)}), \quad g_1 \wedge \dots \wedge g_r = \mathfrak{A}(g_1 \otimes \dots \otimes g_r). \quad \triangleright$$

DEFINITION: TENSORFELD, KOORDINATEN FÜR TENSOREN Wir betrachten eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M und eine Abbildung g , die jedem $p \in M$ ein Element $g_p \in \mathfrak{X}_s^r(T_p M)$ zuweist.

Eine Karte $\varphi : M \rightarrow U$ definiert Basisfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$. Sei (dx^1, \dots, dx^n) die zu $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ duale Basis im zu $T_p M$ dualen Vektorraum. Durch Auswerten von g_p auf ∂_i und dx^j erhält man die Koordinatenfunktionen

$$g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} : M \rightarrow \mathbb{R}$$

von g . g ist differenzierbar, wenn alle Koordinatenfunktionen es sind. In diesem Fall heißt g ein (r, s) -Tensorfeld in M . g kann als Linearkombination

$$g = \sum g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r} \otimes \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_s}$$

geschrieben werden. \triangleright

DEFINITION: TENSORBÜNDEL Die Vereinigung aller $\mathfrak{X}_s^r(T_p M)$ heißt das (r, s) -Tensorbündel $\mathfrak{X}_s^r M$ über M . \triangleright

BEISPIEL: Die Abbildung $p \mapsto \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ist ein $(2, 0)$ -Tensorfeld auf einer Fläche im \mathbb{R}^n . Ein Vektorfeld ist ein $(0, 1)$ -Tensorfeld. \diamond

SATZ 3.15 (KOORDINATENWECHSEL) Seien φ, φ' Karten und sei $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi = \varphi \circ (\varphi')^{-1}$. Sei $(x_{j_i}^i(p))$ die Matrix der partiellen Ableitungen von ψ im Punkt $\varphi'(p)$, und $x_{j_i}^j(p)$ die Matrix der partiellen Ableitungen von ψ^{-1} im Punkt $\varphi(p)$. Seien $g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$ und $g_{i'_1, \dots, i'_r}^{j'_1, \dots, j'_s}$ Koordinaten eines Tensorfeldes g bezüglich der Karten φ, φ' . Dann ist

$$g_{i'_1, \dots, i'_r}^{j'_1, \dots, j'_s}(p) = x_{i'_1}^{j'_1} \cdots x_{i'_r}^{j'_r} \cdot x_{j_1}^{i_1} \cdots x_{j_s}^{i_s} g_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}(p).$$

BEISPIEL: Ist $V = v^j \partial_j = v^j \partial_{j_i}$ ein Vektorfeld mit seinen zwei Koordinatendarstellungen bezüglich der Karten φ, φ' , so ist $v^{j'} = x_{j'}^j v^j$. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle = g_{j_k} dx^j \otimes dx^k = g_{j'k'} dx^{j'} \otimes dx^{k'}$, so ist $g_{j'k'} = g_{j_k} x_{j'}^j x_{k'}^k$. \diamond

4. Kapitel

Riemannsche Geometrie

4.1 MF mit Riemannscher Metrik

Auch in diesem Kapitel ist M , falls nicht anders erwähnt, stets eine n -dim. differenzierbare Mannigfaltigkeit.

DEFINITION: RIEMANNSCHER RAUM, SKALARPRODUKT Ein *Skalarprodukt* auf einem Vektorraum V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Ist in jedem Tangentialvektorraum von M ein Skalarprodukt gegeben, sodaß die Funktionen $g_{jk} : M \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto \langle \partial_j, \partial_k \rangle$ differenzierbar sind, so heißt $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *Riemannscher Raum*, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt *Riemannsche Metrik*. \triangleright

Die Riemannsche Metrik ist ein $(2, 0)$ -Tensorfeld, und die Funktionen g_{jk} sind seine Koeffizienten. Man betrachtet mitunter (siehe Abschnitt 6.2) auch nicht positiv definite Bilinearformen, welche zu den *Pseudo-Riemannschen Räumen*, und schiefsymmetrische Bilinearformen, die zu *symplektischen Räumen* führen.

BEISPIEL: Die folgenden sind Beispiele von Riemannschen Räumen:

- $U \subseteq \mathbb{R}^n, g_{jk} : U \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbare Funktionen so, daß $(g_{jk}(p))$ für alle p eine positiv definite symmetrische Matrix ist. Dann ist für $v, w \in T_p U \cong U \times \mathbb{R}^n$ $\langle v, w \rangle := v^j w^k g_{jk}$ ein Skalarprodukt, das $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zu einem Riemannschen Raum macht.
- Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine TMF und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt des \mathbb{R}^n , so macht die Einschränkung von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $TM M$ zu einem Riemannschen Raum.
Ist $g : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, dann sind die Funktionen $g_{jk}(p) := \langle \partial_j, \partial_k \rangle(p) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial u^j}, \frac{\partial g}{\partial u^k} \right\rangle$ die Koeffizientenfunktionen der Riemannschen Metrik.
- Ist $f : M \rightarrow M'$ eine reguläre Abbildung und $(M', \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum, so ist $\langle v, w \rangle := \langle df(v), df(w) \rangle$ eine Riemannsche Metrik auf M ('Pullback' von $\langle \cdot, \cdot \rangle$).
- Ein mechanisches System hänge von n Parametern ab, und die Menge seiner Zustände sei als eine n -dim. differenzierbare MF modelliert. Für eine lokale Parametrisierung mit Koordinaten u^1, \dots, u^n sei die kinetische Energie eine quadratische Form in den Ableitungen der Parameter: $T(u^1, \dots, u^n) = g_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k$. Dann ist $\langle v, v \rangle := T(v), \langle v, w \rangle := \frac{1}{2}(T(v+w) - T(v) - T(w))$ eine Riemannsche Metrik in M (vgl. Kap. 6.1). \diamond

DEFINITION: BOGENLÄNGE, ENERGIE Ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve, dann sind

$$L_a^b := \left| \int_a^b \sqrt{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle} dt \right| \quad \text{und} \quad E_a^b := \left| \int_a^b \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt \right|$$

die *Bogenlänge* von und die *Energie* von c im Intervall $[a, b]$. ▷

BEMERKUNG: Die Bogenlänge ist invariant unter Parametertransformationen, während es die Energie *nicht* ist.

LEMMA 4.1 $L_a^b(c)^2 \leq |b - a| E_a^b(c)$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const.}$

BEWEIS: Die Cauchy-Schwarzsche Ungl. in einem Vektorraum V mit positiv definitem Skalarprodukt lautet $\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle$ mit Gleichheit genau für v, w linear abhängig. Wir setzen $V = C[a, b]$, $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$, $v = 1$, $w = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$. Daraus folgt direkt die Behauptung. □

Wir halten ein nichtleeres Intervall $[a, b]$ fest und verwenden die Notation $\mathcal{C}_{p,q}$ für die Menge aller stückweise differenzierbaren Kurven $c : [a, b] \rightarrow M$ mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir $a = 0$ und $b = 1$.

SATZ 4.2 Ein Minimum von E_a^b in $\mathcal{C}_{p,q}$ ist auch Minimum von L_a^b und es gilt $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const.}$

Umgekehrt gilt: Ist c ein Minimum von L (d.h. eine kürzeste Verbindung zwischen p und q) in der Klasse $\mathcal{C}_{p,q}$, und ist $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$ konstant, so ist c ein Minimum von E .

BEWEIS: Sei $L(c) \leq L(c')$ für alle c' und sei $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const.}$ Dann ist $E(c) = L(c)^2 \leq L(c')^2 \leq E(c')$, also ist c Minimum von E .

Sei $E(c) \leq E(c')$ für alle c' . Betrachte eine Parametertransformation $\gamma : [a, b] \rightarrow [a, b]$, sodaß $\bar{c} = c \circ \gamma$ die Eigenschaft $\langle \dot{\bar{c}}, \dot{\bar{c}} \rangle = \text{const.}$ hat. Dann ist $L(c) = L(\bar{c})$ und $E(\bar{c}) = L(\bar{c})^2 = L(c)^2 \leq E(c)$, also $L(c)^2 = E(c)$. Daraus folgt $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const.}$

Für jedes andere c' ist dann (o.B.d.A. $\langle \dot{c}', \dot{c}' \rangle = \text{const.}$) $L(c)^2 = E(c) \leq E(c') = L(c')^2$, also $L(c) \leq L(c')$. □

4.2 Zusammenhänge und die kovariante Ableitung

Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, in welcher Beziehung die Vektoren in den einzelnen Tangentialräumen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit zueinander stehen. Es ist a priori nicht klar, wie ein solcher Zusammenhang zwischen den einzelnen Tangentialräumen überhaupt aussehen soll. Eine verwandte Frage ist die folgende: Jedem Punkt einer Kurve wird ein Tangentialvektor zugeordnet. Wie mißt man die Änderung dieses Vektors längs der Kurve?

DEFINITION: AFFINER ZUSAMMENHANG Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung, die zwei (C^r -) Vektorfeldern X, Y ein neues (C^{r-1} -) Vektorfeld $\nabla_X Y$ zuordnet, heißt *affiner Zusammenhang* in M , falls:

- $\nabla_X Y$ ist \mathbb{R} -bilinear (in X und Y)
- $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ für $f : M \rightarrow \mathbb{R}$.
- $\nabla_X (fY) = Xf \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$

▷

BEMERKUNG: CHRISTOFFELSYMBOLE Sei $\varphi : M \rightarrow U$ eine Karte und seien $\partial_1, \dots, \partial_n$ die dazugehörigen Basisfelder. Wir schreiben $\nabla_j := \nabla_{\partial_j}$. Dann ist

$$\nabla_j \partial_k = \Gamma_{jk}^l \partial_l \text{ mit } \Gamma_{jk}^l : M \rightarrow \mathbb{R}$$

Die Funktionen Γ_{jk}^l heißen die Koeffizienten oder *Christoffelsymbole* des Zusammenhangs ∇ . Sind $X = x^j \partial_j$ und $Y = y^k \partial_k$ Vektorfelder, dann ist $\nabla_X Y$ wie folgt gegeben:

$$\nabla_X Y = x^j \nabla_j (y^k \partial_k) = (x^j \partial_j y^l + x^j y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l$$

d.h. in den Wert von $\nabla_X Y$ in einem Punkt p geht von X nur der Wert in p ein. ∇ ist kein Tensorfeld, weil von Y nicht nur Werte, sondern auch Ableitungen eingehen.

DEFINITION: KOVARIANTE ABLEITUNG Die Abbildung

$$X_p \mapsto \nabla_{X_p} Y := (\nabla_X Y)_p$$

heißt *kovariante Ableitung* von Y nach X_p . Ist $V(t) = v^j(t) \partial_j(c(t))$ ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c(t)$ (d.h. $c : I \rightarrow M$ mit $V(t) \in T_{c(t)} M$ für alle $t \in I$) mit $\dot{c} = x^k \partial_k$, dann sei

$$\frac{D}{dt} V := \left(\frac{dv^l}{dt} + v^k x^j \Gamma_{jk}^l \right) \partial_l$$

Ist \tilde{V} ein Vektorfeld, das V fortsetzt (d.h. $V(t) = \tilde{V}_{c(t)}$), so gilt offenbar bei $\dot{c} \neq 0$

$$\frac{D}{dt} V = \nabla_{\dot{c}(t)} \tilde{V}.$$

Wir nennen $\frac{D}{dt} V$ die *kovariante Ableitung* von $V(t)$ längs c .

▷

LEMMA 4.3 Es gilt: $\frac{D}{dt} (V + W) = \frac{D}{dt} V + \frac{D}{dt} W$ sowie $\frac{D}{dt} (fV) = \frac{df}{dt} V + f \frac{D}{dt} V$.

BEWEIS: Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition.

□

LEMMA 4.4 Sind $\Gamma_{jk}^l : M \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so definiert $\nabla_X Y = (x^j \partial_j y^l + x^j y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l$ einen affinen Zusammenhang in einer Koordinatenumgebung.

BEWEIS: Nachrechnen der Definition: $\nabla_{\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2} Y = \lambda_1 \nabla_{X_1} Y + \lambda_2 \nabla_{X_2} Y$ und $\nabla_X (\mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2) = \mu_1 \nabla_X Y_1 + \mu_2 \nabla_X Y_2$ für beliebige Funktionen $\lambda_1, \lambda_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ und Skalare $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ sieht man sofort;

$$\nabla_X (fY) = (x^j \partial_j f y^l + x^j f y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l = (x^j \partial_j (f) y^l + x^j f \partial_j y^l + x^j f y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l = Xf Y + f \nabla_X Y$$

□

BEISPIEL: FLACHER ZUSAMMENHANG Ist $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$, und verwenden wir die identische Funktion als lokale Parametrisierung, so wird durch $\Gamma_{jk}^l = \text{const.} = 0$, der *flache Zusammenhang* definiert. Dann ist $\frac{D}{dt} v = \frac{d}{dt} V$.

◇

BEISPIEL: INDUZIERTER ZUSAMMENHANG Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine TMF, $p \in M$, so ist $v \in T_p M$ zerlegbar in einen Tangential- und einen Normalanteil: $v = v^t + v^n$ mit $v^t \in T_p M$ und $v^n \perp T_p M$. Ist $V(t)$ ein Vektorfeld längs $c : I \rightarrow M$, so sei

$$\frac{D}{dt} V := \left(\frac{dV}{dt} \right)^t \in T_{c(t)} M.$$

Sind X, Y Vektorfelder, so sei

$$\nabla_{X_p} Y := \left. \frac{D}{dt} Y(t) \right|_{t=0},$$

wenn $c : I \rightarrow M$ Kurve ist mit $\dot{c}(0) = X_p$, $Y(t) = Y_{c(t)}$.

Wir berechnen die Koeffizienten Γ_{jk}^l bezüglich einer lokalen Parametrisierung $g : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M$:

$$\nabla_j \partial_k = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k} \right)^t = \Gamma_{jk}^l \partial_l,$$

d.h. die Γ_{jk}^l sind die Koeffizienten vom Tangentialanteil von $\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k}$ in der Basis $\partial_1, \dots, \partial_m$. ∇ heißt der vom \mathbb{R}^n in der TMF induzierte Zusammenhang. \diamond

DEFINITION: SYMMETRISCHER ZUSAMMENHANG Der Zusammenhang ∇ heißt *symmetrisch*, wenn $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ \triangleright

LEMMA 4.5 Ein Zusammenhang ist genau dann symmetrisch, wenn für seine Koeffizientenfunktionen gilt $\Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l$.

BEWEIS: "⇒": $[\partial_j, \partial_k] = 0 \Rightarrow \nabla_j \partial_k = \nabla_k \partial_j$

"⇐": $\nabla_X Y - \nabla_Y X = (x^j \partial_j y^l + x^j y^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l - (y^j \partial_j x^l + y^j x^k \Gamma_{jk}^l) \partial_l = [X, Y]$ (wobei die Terme mit den Γ_{jk}^l einander aufgrund der Symmetrie wegheben). \square

LEMMA 4.6 Der induzierte Zusammenhang ist symmetrisch.

BEWEIS: Ist $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung, so ist

$$\nabla_j \partial_k = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k} \right)^t = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^k \partial u^j} \right)^t = \nabla_k \partial_j \Rightarrow \Gamma_{jk}^l = \Gamma_{kj}^l \quad \square$$

LEMMA 4.7 Ist ∇ symmetrisch, dann gilt für jede differenzierbare Abbildung $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ $(u, v) \mapsto f(u, v)$:

$$\frac{D}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) = \frac{D}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right),$$

BEWEIS: Sei $\varphi : M \rightarrow U$ eine Karte, $\partial_1, \dots, \partial_n$ Basisfelder und $\varphi \circ f(u, v) = (\tilde{f}^1(u, v), \dots, \tilde{f}^n(u, v))$. Dann hat $\frac{\partial f}{\partial u}$ die Koordinaten $\left(\frac{\partial \tilde{f}^1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial \tilde{f}^n}{\partial u} \right)$, und es gilt:

$$\frac{D}{dv} \frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{f}^l}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \tilde{f}^j}{\partial u} \frac{\partial \tilde{f}^k}{\partial v} \Gamma_{jk}^l \right) \partial_l = \frac{D}{du} \frac{\partial f}{\partial v}. \quad \square$$

BEMERKUNG: Man könnte versuchen, Lemma 4.7 so zu zeigen: Betrachte die Vektorfelder $X = \frac{\partial f}{\partial u}$ und $Y = \frac{\partial f}{\partial v}$. Zu zeigen ist $\nabla_X Y = \nabla_Y X$ längs f . Sei g eine beliebige reellwertige Funktion. Wegen

$$[X, Y]g = XYg - YXg = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 0$$

ist $[X, Y] = 0$. Aus der Symmetrie des Zusammenhangs folgt die Behauptung.

Diese Argumentation ist genau in den regulären Punkten von f richtig, denn dort ist das Bild von f lokal eine 2-dim. TMF, und die partiellen Ableitungen sind Vektorfelder, die nach M fortgesetzt werden können.

4.3 Geodätische Parallelverschiebung

DEFINITION: PARALLELVERSCHIEBUNG Ist V ein stetiges Vektorfeld längs einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve c mit $\frac{D}{dt}V = 0$ für jedes stetig differenzierbare Segment von c , dann heißt V *Parallelfeld* längs c . \triangleright

BEMERKUNG: Anschaulich bedeutet $\frac{D}{dt}V = 0$, daß sich der Vektor $V(t)$ für den Beobachter an der Stelle $c(t)$ auf der Fläche 'nicht ändert'. Ist ∇ der induzierte Zusammenhang, dann heißt $\frac{D}{dt}V = 0$, daß der Tangentialanteil von $\frac{d}{dt}V$ verschwindet, d.h. die Änderung von V senkrecht auf die Fläche steht.

SATZ 4.8 Ist $p \in M, V_p \in T_pM, c : I \rightarrow M$ mit $c(0) = p$, so existiert genau ein Vektorfeld $V(t)$ längs c mit $V(0) = V_p$, das ein Parallelfeld ist.

BEWEIS: Es genügt, die Behauptung für alle stetig differenzierbaren Segmente von c zu beweisen, die vollständig in einer Koordinatenumgebung liegen. Der allgemeine Fall folgt dann durch mehrmaliges Anwenden des Spezialfalles. In Koordinaten gilt:

$$V(t) \text{ ist Parallelfeld} \iff \frac{d}{dt}v^l + \Gamma^l_{jk}x^j v^k = 0$$

Dies ist ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung für die Koeffizientenfunktionen $v^j(t)$ und hat demnach bei vorgegebenen Anfangswert $V(0)$ eine eindeutige Lösung für alle t . \square

DEFINITION: GEODÄTISCHE PARALLELVERSCHIEBUNG Sei $V_p \in T_pM$ und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $c(t_0) = p$. Es existiert ein eindeutiges Parallelfeld $V(t)$ längs c mit $V(t_0) = V_p$. Die Abbildung

$$Pt_{t_0}^{t_1}(c) : T_pM \rightarrow T_{c(t_1)}M \quad V_p \mapsto V(t_1)$$

heißt *geodätische Parallelverschiebung* oder *Paralleltransport* von t_0 nach t_1 längs c . \triangleright

Unmittelbar aus der Definition des Paralleltransports ergeben sich die folgenden Eigenschaften:

- $Pt_{t_0}^{t_2}(c) = Pt_{t_0}^{t_1}(c) \circ Pt_{t_1}^{t_2}(c)$
- $Pt_{t_0}^{t_2}(c) \circ Pt_{t_1}^{t_0}(c) = id_{T_pM}$

LEMMA 4.9 $Pt_{t_0}^{t_1}(c)$ ist ein linearer Vektorraumisomorphismus.

BEWEIS: Die Lösung einer linearen Differentialgleichung hängt linear von den Anfangswerten ab, was die Linearität innerhalb einer Koordinatenumgebung zeigt. Durch Iteration erreicht man so beliebige Punkte $c(t)$. Die Invertierbarkeit folgt aus $Pt_{t_0}^{t_1}(c) \circ Pt_{t_1}^{t_0}(c) = id_{T_pM}$. \square

LEMMA 4.10 Der Paralleltransport längs einer Kurve ist unabhängig von Parametertransformationen.

BEWEIS: Wir setzen $\bar{c} = c \circ \gamma$, und $t = \gamma(u)$. Weiters sei $dc/dt = \dot{c}$ und $d\bar{c}/du = \bar{c}'$. Dann ist $\dot{c} = \bar{c}' \cdot du/dt$, und $\nabla_{\dot{c}} = du/dt \cdot \nabla_{\bar{c}'}$. D.h. die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes $V(t)$ längs c ist genau dann gleich 0, wenn die kovariante Ableitung von $V \circ \gamma(u)$ längs $c \circ \gamma$ gleich 0 ist. \square

DEFINITION: HOLONOMIEGRUPPE Sei $[a, b]$ ein nichtleeres abgeschlossenes Intervall und \mathcal{C}_p^M die Menge aller stückweise glatten Kurven mit $c(a) = c(b) = p$. Sei \mathcal{U}_p das System der offenen Umgebungen von p . Dann heißen

$$H_p := \{ \text{Pt}_a^b(c) \mid c \in \mathcal{C}_p^M \} \quad \text{und} \quad H_p^\infty := \bigcap_{U \in \mathcal{U}_p} \{ \text{Pt}_a^b(c) \mid c \in \mathcal{C}_p^U \}$$

die Holonomiegruppe bzw. die lokale Holonomiegruppe von p . \triangleright

SATZ 4.11 Sind $p, q \in M$ und ist $c : [a, b] \rightarrow M$ eine stückweise glatte Kurve mit $c(a) = p$ und $c(b) = q$, so ist $H_p = \text{Pt}_a^b(c)^{-1} \circ H_q \circ \text{Pt}_a^b(c)$, d.h. die Holonomiegruppen von Punkten, die durch eine Kurve verbunden werden können, sind zueinander konjugiert.

BEWEIS: Sei $\bar{c} \in \mathcal{C}_q^M$. Dann ist $c + \bar{c} + c^{-1} \in \mathcal{C}_p^M$, wobei $c + \bar{c} + c^{-1}$ den Weg symbolisiert, der entsteht, wenn man zuerst c von p nach q durchläuft, dann den Weg \bar{c} , und anschließend auf c durch Umkehrung des Weges von q nach p zurückläuft, und abschließend noch eine Parametertransformation durchführt, sodaß der entstehende Weg in $[a, b]$ definiert ist. Ebenso folgt aus $\bar{c} \in H_q$, daß $c^{-1} + \bar{c} + c \in H_q$. \square

4.4 Riemannsche Zusammenhänge

Man möchte gerne, daß der Paralleltransport von Vektoren längs einer Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit Längen und Winkel nicht ändert. Diejenigen Zusammenhänge, die dieser Anforderung genügen, heißen Riemannsche Zusammenhänge.

DEFINITION: RIEMANNSCHER ZUSAMMENHANG ∇ heißt *Riemannscher Zusammenhang*, wenn der Paralleltransport längs einer Kurve eine orthogonale lineare Abbildung ist. D.h. für alle $c : I \rightarrow M$ und für alle $v, w \in T_{c(a)}M$ gilt:

$$\langle \text{Pt}_a^b(c)v, \text{Pt}_a^b(c)w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \triangleright$$

LEMMA 4.12 Seien X, Y, Z Vektorfelder in M , und seien V, W Vektorfelder längs einer Kurve $c : I \rightarrow M$. Ist ∇ ein Riemannscher Zusammenhang, so gilt.

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ \frac{d}{dt}\langle V, W \rangle &= \left\langle \frac{D}{dt} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt} W \right\rangle \end{aligned}$$

Jede der beiden Bedingungen ist auch hinreichend.

BEWEIS: Die erste Gleichung folgt aus der zweiten, wenn wir eine Kurve $c : I \rightarrow M$ mit $\dot{c}(0) = X_p$ wählen. Sei $E_{1,p}, \dots, E_{n,p}$ eine ONB in $T_p M$ für $c(0) = p$ und $E_j(t)$ ein Parallelfeld längs c mit $E_j(0) = E_{j,p}$. Dann ist $E_1(t), \dots, E_n(t)$ eine ONB in $T_{c(t)}M$.

Wir setzen $V(t) = v^j(t)E_j(t)$, $W(t) = w^j(t)E_j(t)$ und berechnen $\langle V, W \rangle = \langle v^j E_j, w^j E_j \rangle = \sum_{j=1}^n v^j w^j$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} V &= \dot{v}^j E_j + v^j \underbrace{\frac{D}{dt} E_j}_{=0}, \quad \text{analog} \quad \frac{D}{dt} W = \dot{w}^j E_j, \quad \implies \\ \frac{d}{dt}\langle V, W \rangle &= \sum_{j=1}^n (\dot{v}^j w^j + v^j \dot{w}^j) = \left\langle \frac{D}{dt} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt} W \right\rangle \end{aligned}$$

Um die Umkehrung zu zeigen, beachten wir

$$\frac{D}{dt} V = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \langle V, V \rangle = \left\langle \frac{D}{dt} V, V \right\rangle + \left\langle V, \frac{D}{dt} V \right\rangle = \langle 0, V \rangle + \langle V, 0 \rangle = 0.$$

Also ändert sich die Norm eines Vektors bei Paralleltransport nicht. Da bereits das gesamte euklidische Skalarprodukt durch die Norm bestimmt ist folgt daraus, daß ∇ ein Riemannscher Zusammenhang ist. \square

LEMMA 4.13 *Der induzierte Zusammenhang in einer Teilmannigfaltigkeit ist ein Riemannscher Zusammenhang.*

BEWEIS: Sei $c : I \rightarrow M$ eine Kurve und V ein Parallelfeld längs c , d.h. $(\frac{d}{dt} V)^t = 0$. Z.z. ist $\langle V, V \rangle = \text{const.}$ \therefore Wir berechnen also $\frac{d}{dt} \langle V, V \rangle = 2 \langle V, \frac{d}{dt} V \rangle = 2 \langle V, (\frac{d}{dt} V)^t \rangle = 0$. \square

Wir kommen nun zu einem wichtigen Resultat über Riemannsche Zusammenhänge. Es besagt, daß es in einem Riemannschen Raum genau einen Zusammenhang gibt, der die Eigenschaft hat, symmetrisch und Riemannsch zu sein.

SATZ 4.14 (DER LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG) *Ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum, dann existiert genau ein symmetrischer Riemannscher Zusammenhang.*

BEWEIS: Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Wir verwenden eine Karte und wenden $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ auf die Basisfelder an:

$$\begin{aligned} \partial_i g_{jk} &= \partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \langle \nabla_i \partial_j, \partial_k \rangle + \langle \partial_j, \nabla_i \partial_k \rangle \\ \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle &= \langle \nabla_j \partial_k, \partial_i \rangle + \langle \partial_k, \nabla_j \partial_i \rangle \\ \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle &= \langle \nabla_k \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_k \partial_j \rangle \end{aligned}$$

Man beachte, daß die unterstrichenen Ausdrücke gleich sind. Addiert man die ersten beiden Zeilen und zieht die dritte ab, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle + \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle - \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle) &= \langle \nabla_i \partial_j, \partial_k \rangle = \langle \Gamma_{ij}^l \partial_l, \partial_k \rangle = \Gamma_{ij}^l g_{lk} \\ \implies \Gamma_{ij}^l &= g^{lk} \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \end{aligned}$$

D.h. die Koeffizienten Γ_{jk}^l von ∇ sind durch die Koeffizienten g_{jk} der Metrik bestimmt. Umgekehrt können wir die obige Formel zur Definition eines Zusammenhanges ∇ benutzen, und nachrechnen, daß er symmetrisch und Riemannsch ist. \square

BEMERKUNG: GEODÄTISCHE KRÜMMUNG Für den induzierten Zusammenhang einer $(n - 1)$ -dim. TMF $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine Kurve $c : I \rightarrow M$ haben wir mit $c_1 = \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}$, $\dot{c}_1 = \|\dot{c}\| \kappa c_2 = \|\dot{c}\| (\kappa_n n + \kappa_g m)$, $m \in T_p M$ mit $\|m\| = 1$:

$$\frac{D}{dt} c_1 = \|\dot{c}\| \kappa_g m, \quad \left\| \frac{D}{dt} c_1 \right\| = \|\dot{c}\| \kappa_g.$$

DEFINITION: GEODÄTISCHE KRÜMMUNG Für eine Riemannsche MF $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist die *geodätische Krümmung* einer Kurve $c : I \rightarrow M$ durch

$$\kappa_g := \left\| \frac{D}{dt} c_1 \right\| / \|\dot{c}\|$$

definiert. ▷

BEMERKUNG: Der induzierte Zusammenhang $\frac{D}{dt}V = \left(\frac{d}{dt}V\right)^t$ ist nach dem Satz von Levi-Civita durch die Metrik allein bestimmt. Alle Größen, die sich durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und ∇ darstellen lassen, sind nur von der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ abhängig.

Insbesondere ist die geodätische Krümmung κ_g einer Kurve eine solche 'Größe der inneren Geometrie', was aus der früheren Definition nicht ersichtlich war.

4.5 Geodätische Linien

DEFINITION: GEODÄTISCHE LINIEN Eine Kurve $c : I \rightarrow M$ mit $\frac{D}{dt}\dot{c} = 0$ heißt *geodätische Linie*. \triangleright

Für eine geodätische Linie gilt $\|\dot{c}\| = \text{const.}$, denn das Tangential-Vektorfeld von c ist ein Parallelfeld längs c und $\kappa_g = 0$.

Alternativ kann man eine geodätische Linie so definieren, daß sie eine Parametrisierung besitzt mit $\frac{D}{dt}\dot{c} = 0$, bzw. daß, wenn man sie nach der Bogenlänge parametrisiert, $\frac{D}{dt}\dot{c} = 0$. Dies ist äquivalent zu $\frac{D}{dt}\dot{c} = \lambda(t)\dot{c}$.

In Koordinaten: Sei $\varphi : M \rightarrow U$ eine Karte und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve. Dann ist $\varphi \circ c = (c^1(t), \dots, c^n(t))$ und $d\varphi \circ \dot{c} = (\dot{c}^1(t), \dots, \dot{c}^n(t))$. c ist eine geodätische Linie, wenn

$$\frac{D}{dt}\dot{c} = (\ddot{c}^l + \Gamma_{jk}^l \dot{c}^j \dot{c}^k) \partial_l = 0.$$

D.h. die Koeffizientenfunktionen c^1, \dots, c^n einer geodätischen Linie erfüllen ein System von Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Durch die Karte sind auch Koordinaten für Tangentialvektoren bestimmt, und der Tangentialvektor \dot{c} hat die Koordinaten $(c_1, \dots, c_n, \dot{c}_1, \dots, \dot{c}_n)$. Das obige System ist äquivalent zu dem folgenden System von Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{c}^l &= d^l \\ \dot{d}^l &= \Gamma_{jk}^l d^j d^k \end{aligned}$$

Verwenden wir $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n$ als Koordinaten im Tangentialbündel, so ist durch das obige System ein *Vektorfeld* G in TM (mit Elementen in TTM) bestimmt. Der Fluß von G heißt der *geodätische Fluß*. Seine Integralkurven sind die Tangential-Vektorfelder von geodätischen Linien. Ist $v \in T_p M$, so ist

$$\text{Fl}_G((p, v), t) = (c(t), d(t)) = (c(t), \dot{c}(t))$$

das Tangentialvektorfeld der geodätischen Linie c mit $c(0) = p$, $\dot{c}(0) = d(0) = v$.

Wir verwenden die Abbildung $\pi_1 : TM \rightarrow M$, die einen Tangentialvektor auf seinen Fußpunkt abbildet. Dann ist $\pi_1 \circ \text{Fl}_G((p, v), t)$ die geodätische Linie c mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$.

LEMMA 4.15 $\pi_1 \circ \text{Fl}_G((p, v), \kappa t) = \pi_1 \circ \text{Fl}_G((p, \kappa v), t)$. Für alle $p \in M$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U von p , sodaß für $q \in U$, $\|v\| < \varepsilon$ und $|t| < 2$ der geodätische Fluß $\text{Fl}_G((q, v), t)$ definiert ist.

BEWEIS: Ist $c(t)$ eine geodätische Linie, so auch $c(\kappa t)$, und es gilt $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c(\kappa t) = \kappa \dot{c}(0)$. Daraus folgt die erste Behauptung.

Es gibt eine offene Umgebung \tilde{U} von $(p, 0) \in TM$, und ein $\delta > 0$, sodaß $\text{Fl}_G((q, v), t)$ für $(q, v) \in \tilde{U}$ und $|t| < \delta$ definiert ist. \tilde{U} enthält eine Produkt-Umgebung der Form $\{(q, v) \mid q \in U, \|v\| < \delta_1\}$. Nun können wir $\varepsilon < \delta_1/2\delta$ wählen und das 1. Ergebnis anwenden. \square

DEFINITION: EXPONENTIALABBILDUNG Die Abbildung

$$\exp_p : D \subseteq T_pM \longrightarrow M, \exp_p(v) := \pi_1 \circ \text{Fl}_G((p, v), 1)$$

ordnet einem Tangentialvektor $v \in T_pM$ den Punkt $c(1)$ der geodätischen Linie c mit $c(0) = p, \dot{c}(0) = v$ zu. \triangleright

Nach dem obigen Lemma gibt es eine offene Kugel in T_pM , wo \exp_p sicher definiert ist.

LEMMA 4.16 Lokal ist \exp_p ein Diffeomorphismus von $D \subseteq T_pM$ nach M . T_pM ist ein Vektorraum und wird mit seinem Tangentialraum $T_0(T_pM)$ identifiziert. Das Differential der Exponentialabbildung bei 0 ist die Identität:

$$d \exp_p(0) : T_pM \longrightarrow T_pM = \text{id}_{T_pM}.$$

BEWEIS: Wir greifen auf die Definition von 'Differential' zurück: $d \exp_p(0)$ ist diejenige lineare Abbildung von Tangentialräumen, welche $v \in T_pM = T_0(T_pM)$ abbildet auf

$$d \exp_{p,0}(v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi_1 \circ \text{Fl}_G^1(p, tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi_1 \circ \text{Fl}_G^t(p, v) = v,$$

nach Definition von Fl_G . Demnach ist $d \exp_p(0) = \text{id}_{T_pM}$. Insbesondere ist \exp_p lokal um 0 ein Diffeomorphismus. \square

BEMERKUNG: NORMALKOORDINATEN Wählen wir eine Basis E_1, \dots, E_n in T_pM , so können wir die Abbildung $(x^1, \dots, x^n) \mapsto \exp_p(x^i E_i)$ als lokale Parametrisierung einer Umgebung von p verwenden.

Nachdem die geodätischen Linien durch p in diesen Koordinaten die Gestalt $(c^1, \dots, c^n) = (t \cdot v^1, \dots, t \cdot v^n)$ besitzen, liefert die Differentialgleichung der geodätischen Linien für $t = 0$ die Gleichung $\dot{c}^j \dot{c}^k \Gamma_{jk}^l = 0$, für alle \dot{c}^i . Daher ist $\Gamma_{jk}^l(p) = 0$.

Ist E_1, \dots, E_n eine Orthonormalbasis, so ist wegen $d \exp_p(0) = \text{id}_{T_pM}$ auch $g_{jk}(p) = 0$.

SATZ 4.17 Für alle $p \in M$ existiert eine Umgebung $U \subseteq M$, so daß zwei Punkte aus U durch eine geodätische Linie $c(t)$ mit $c(0) = p, c(1) = q$ verbunden werden können, und so, daß die Anfangswerte $c(0)$ und $\dot{c}(0)$ in differenzierbarer Weise von den Randwerten $c(0) = p, c(1) = q$ abhängen.

BEWEIS: Wir betrachten die Abbildung $F : M \times T_pM \longrightarrow M \times M, (p, v) \mapsto (p, \exp_p(v))$, d.h. die Abbildung 'Anfangswerte \mapsto 'Randwerte' einer geodätischen Linie. Zu zeigen ist, daß F^{-1} existiert und differenzierbar ist.

Wir verwenden eine Karte $\varphi : U_p \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und bestimmen die Koordinatenmatrizen von $d\tilde{F}_{(p,0)}$:

$$\begin{array}{ccc} (p, v) & \xrightarrow{F} & (p, \exp_p(v)) \\ \varphi \times d\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \times \varphi \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

$$d\tilde{F}_{(p,0)} = \begin{bmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^n} & \text{id}_{\mathbb{R}^n} \\ 0 & d \exp_p(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{id}_{\mathbb{R}^n} & \text{id}_{\mathbb{R}^n} \\ 0 & \text{id}_{\mathbb{R}^n} \end{bmatrix}$$

Demnach ist \tilde{F} ein lokaler Diffeomorphismus und es existiert ein $\tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^n$, sodaß $\tilde{W} \times W$ eine offene Umgebung von $\varphi \times \varphi(F(p, v))$ ist. Setze dann $U = \varphi^{-1}(\tilde{W})$. \square

DEFINITION: GEODÄTISCHE SPHÄRE Die Menge $\exp_p(r S^{n-1})$ heißt *geodätische Sphäre* vom Radius r um den Punkt p . \triangleright

SATZ 4.18 (LEMMA VON GAUSS) Die geodätischen Sphären stehen für alle Radien orthogonal zu den vom Mittelpunkt ausgehenden geodätischen Linien.

BEWEIS: Sei $v(t) \in T_p M$, mit $\|v(t)\| = 1$, d.h. $v(t)$ ist eine Kurve in der Einheitssphäre $S^{n-1} \subseteq T_p M$. Sei $f(r, t) = \exp_p(r v(t))$. Die Kurven $t = \text{const}$ sind geodätische Linien, also ist $\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial r} = 0$. Zu zeigen ist $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 1 &\implies 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle; \\ \frac{\partial}{\partial r} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0 \\ \implies \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle \Big|_{r=0} = 0 \quad \text{wegen } f(0, t) = p = \text{const.} \quad \square \end{aligned}$$

LEMMA 4.19 Sei $c(t) = \exp_p(r(t)v(t))$ mit $\|v(t)\| = 1$ und $r(t) > 0$, d.h. c ist eine Kurve mit 'geodätischen Polarkoordinaten' $r(t)$, $v(t)$. In einer Umgebung von p gilt

$$L_a^b(c) \geq |r(b) - r(a)|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $v(t) = \text{const.}$ und $r(t)$ monoton.

BEWEIS: Sei $f(r, t) = \exp_p(r v(t))$. Dann ist $c(t) = f(r(t), t)$, $\dot{c}(t) = \dot{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial t}$ und $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 1$. Es folgt, daß

$$\begin{aligned} L_a^b(c) &= \int_a^b \left\langle \dot{c}, \dot{c} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b |\dot{r}| \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt + \int_a^b \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt \\ &\geq \int_a^b |\dot{r}| dt \geq \left| \int_a^b \dot{r} dt \right| = |r(b) - r(a)|, \end{aligned}$$

wobei in der Ungleichungskette Gleichheit genau dann gilt, wenn $v(t) = \text{const}$ und \dot{r} keinen Vorzeichenwechsel besitzt, d.h. genau dann, wenn $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0$ und $r(t)$ monoton wachsend ist. \square

BEMERKUNG: Der obige Satz gilt auch für stückweise stetig differenzierbare r, v .

SATZ 4.20 Für alle $p \in M$ existiert eine Umgebung $W \subseteq M$, so daß es für alle $q, r \in W$ eine eindeutige kürzeste Verbindung gibt. Diese ist eine von q, r in differenzierbarer Weise abhängige geodätische Linie.

BEWEIS: Für $p \in M$ existiert nach Satz 4.17 eine Umgebung $\tilde{W} \subseteq M$, so daß für je zwei Punkte $q, r \in \tilde{W}$ eine geodätische Linie gibt, die q und r verbindet. Für alle $q \in \tilde{W}$ ist \exp_q ein lokaler Diffeomorphismus auf W , $\exp_p^{-1}(r) = v$, so daß $\exp_p(v) = q$. Wähle nun eine Umgebung $W \subseteq \tilde{W}$ so klein, daß ein δ existiert, so

daß $\exp_q(v)$ definiert ist, für alle v mit $\|v\| < \delta$ und $W \subseteq \exp_p(\{v \in T_p M \mid \|v\| < \delta\})$.

Sei also o.B.d.A. $c(t) = \exp_q(r(t)v(t))$ für $c(t) \in W$. Des weiteren sei $\rho = \|w\|$ für $w = \exp^{-1}(r)$. Jede Kurve muß durch alle geodätischen Sphären mit Radius $a \leq \rho$. Nach den vorigen Lemma ist dann $L(c) \geq \rho$ mit Gleichheit genau für eine (radiale) geodätische Linie. \square

SATZ 4.21 *Gibt es eine kürzeste Verbindung von zwei Punkten $p, q \in M$ in der Klasse der stückweise differenzierbaren Kurven, so ist diese (i) glatt und (ii) eine geodätische Linie.*

BEWEIS: Eine solche kürzeste Verbindung muß zwischen je 2 ihrer Punkte die kürzeste Verbindung sein. Nach Satz 4.20 ist sie zwischen 2 genügend nahen Punkten differenzierbar und eine geodätische Linie. \square

BEMERKUNG: "Lange" geodätische Linien müssen keine kürzesten Verbindungen sein. Vgl. Satz 5.13.

4.6 Die erste Variation der Energie $E_0^1(c)$ einer Kurve

DEFINITION: VARIATION Sei c_u eine differenzierbare Schar von stückweise stetig differenzierbaren Kurven $c_u : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c_u(0) = p, c_u(1) = q$. Es sei $\frac{\partial c_u}{\partial t} \in C^1[0, 1]$ und $\frac{\partial c_u}{\partial u} \in C[0, 1]$. c_u heißt *Variation* von c , und $V(t) = \frac{\partial c_u}{\partial u} \Big|_{u=0}$ heißt das *Variationsvektorfeld*. \triangleright

DEFINITION: ERSTE VARIATION DER ENERGIE, KRITISCHER PUNKT

$$\frac{d}{du} \Big|_{u=0} E_0^1(c_u) = \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \int_0^1 \langle \dot{c}_u(t), \dot{c}_u(t) \rangle dt$$

heißt die *erste Variation der Energie* der Schar c_u . c ist kritischer Punkt des Funktionals E , wenn für alle Variationen c_u mit $c_0 = c$ die erste Variation der Energie verschwindet. \triangleright

LEMMA 4.22 *Sei für eine stückweise C^2 -Kurve $c : [0, 1] \rightarrow M$ $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ die Stellen, wo c nicht C^2 ist. Dann bezeichnen wir mit $\dot{c}^+(t_i)$ und $\dot{c}^-(t_i)$ den links- und den rechtsseitigen Grenzwert von \dot{c} . Sei c_u eine Variation von c mit Variationsvektorfeld V . Dann gilt*

$$\frac{1}{2} \frac{d}{du} \Big|_{u=0} E_0^1(c_u) = - \int_0^1 \left\langle V, \frac{D}{dt} \dot{c} \right\rangle dt - \sum_{i=1}^n \left\langle V, \dot{c}_0^+(t_i) - \dot{c}_0^-(t_i) \right\rangle.$$

BEWEIS: Differentiation von $E = \int \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt$ ergibt $\frac{dE}{du} = \int \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt$:

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 2 \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial c_u}{\partial t}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle$$

$$\implies \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial u} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt = \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{\partial c_u}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t_i, u=0}^{t_{i+1}} - \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \frac{\partial c_u}{\partial u}, \frac{D}{dt} \dot{c} \right\rangle \Big|_{u=0} dt.$$

Summation über $i = 0, \dots, n - 1$ liefert die Behauptung. \square

SATZ 4.23 Die kritischen Punkte für das Funktional E_0^1 in der Klasse der stückweise C^2 -Kurven, die zwei Punkte p und q miteinander verbinden, sind genau die geodätischen Linien (d.h. erfüllen die Gleichung $\frac{D}{dt} \dot{c} = 0$ und sind bereits C^2 -Kurven).

BEWEIS: Sei $c : I \rightarrow M$ eine stückweise C^2 -Kurve, die p mit q verbindet. Ist c_u eine Variation, so sei $V(t) = \left. \frac{\partial c_u}{\partial u} \right|_{u=0}$ das Variationsvektorfeld. Ist $V(t)$ gegeben, so ist $c_u(t) = \exp_{c(t)}(u \cdot V(t))$ eine Variation mit Variationsvektorfeld V .

Ist c geodätische Linie, so folgt aus Lemma 4.22, daß die 1. Variation der Energie unabhängig von V verschwindet.

Sei umgekehrt c ein kritischer Punkt des Energiefunktionals und seien $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$ die Stellen, wo c nicht C^2 ist. Wähle $f : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit Nullstellen genau in den t_i , und setze $V(t) = f(t) \cdot \frac{D}{dt} \dot{c}(t)$. Dann folgt

$$\left. \frac{dE}{du} \right|_{u=0} = - \int_0^1 f(t) \left\langle \frac{D}{dt} \dot{c}, \frac{D}{du} \right\rangle dt = 0 \implies \frac{D}{dt} \dot{c} = 0.$$

D.h. c muß geodätische Linie sein, wo c C^2 ist. Wähle nun $V(t)$ so, daß $V(t_i) = \dot{c}^+(t_i) - \dot{c}^-(t_i)$ und ansonsten beliebig.

$$\left. \frac{dE}{du} \right|_{u=0} = - \sum_{i=1}^{n-1} \left\langle \dot{c}^+(t_i) - \dot{c}^-(t_{i+1}), \dot{c}^+(t_i) - \dot{c}^-(t_{i+1}) \right\rangle = 0$$

$\implies \dot{c}^+(t_i) = \dot{c}^-(t_{i+1})$, d.h. $c \in C^2[0, 1]$. □

FOLGERUNG: Kurven, die nach Umparametrisierung geodätische Linien werden, sind genau die kritischen Punkte des Funktionals L_0^1 : Wähle eine Parametrisierung mit $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \text{const.} \implies (L_0^1)^2 = E_0^1$. □

4.7 Vollständigkeit

DEFINITION: ABSTANDSFUNKTION Seien $p, q \in M$, und sei $\mathcal{C}_{p,q}$ die Menge aller stückweise differenzierbaren Kurven $c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(0) = p$, $c(1) = q$. Dann ist der Abstand von p, q definiert durch

$$d(p, q) := \inf_{c \in \mathcal{C}_{p,q}} L_0^1(c). \quad \triangleright$$

LEMMA 4.24 Die Abstandsfunktion $d : U \subseteq M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik. Die Topologie von M ist die der Metrik.

BEWEIS: Symmetrie und die Dreiecksungleichung sind klar. Wir müssen noch $d(p, q) = 0 \implies p = q$ zeigen. Dies folgt direkt aus Lemma 4.19, denn alle Kurven von p nach q müssen die kleinen geodätischen Sphären um p durchqueren.

Nach Lemma 4.16 wird eine Umgebungsbasis aus kleinen ε -Umgebungen von $0 \in T_p M$ durch \exp_p auf eine Umgebungsbasis von $p \in M$ abgebildet. Nach Lemma 4.19 sind diese Mengen auch ε -Umgebungen im Sinne der Metrik. Damit ist jede offene Menge in M auch im Sinne der metrischen Topologie offen und umgekehrt. □

Diese Metrik macht (M, d) also zu einem metrischen Raum.

DEFINITION: CAUCHYFOLGE, VOLLSTÄNDIGER METRISCHER RAUM Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M heißt *Cauchy-Folge*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, sodaß für alle $n, n' > m$ $d(a_n, a_{n'}) < \varepsilon$ gilt. Ein metrischer Raum (M, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert. \triangleright

DEFINITION: GEODÄTISCH VOLLSTÄNDIG, HEINE-BOREL EIGENSCHAFT (M, d) heißt *geodätisch vollständig*, falls jede geodätische Linie beliebig weit fortsetzbar ist (dann ist insbesondere \exp_p für alle $v \in T_p M$ definiert).

(M, d) hat die *Heine-Borel Eigenschaft*, wenn die kompakten Mengen genau die beschränkten und abgeschlossenen Mengen sind. \triangleright

Wir kommen nun zu einem sehr wichtigen Satz betreffend die Vollständigkeit von Riemannschen Räumen:

SATZ 4.25 (SATZ VON HOPF UND RINOW) Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum mit der oben definierten Metrik d . Von den folgenden vier Eigenschaften

1. (M, d) ist ein vollständiger metrischer Raum
2. $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist geodätisch vollständig
3. M hat die Heine-Borel Eigenschaft
4. Je zwei Punkte $p, q \in M$ können durch eine minimale geodätische Linie verbunden werden

sind 1.–3. äquivalent und implizieren 4.

BEISPIEL: Ist M kompakt, oder $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, so erfüllt M die Bedingung (3) des Satzes von Hopf und Rinow. Dann lassen sich je zwei Punkte durch eine minimale geodätische Linie miteinander verbinden. Z.B. hat jede Fläche im \mathbb{R}^n , die durch eine Gleichung $F(x^1, \dots, x^n) = 0$ definiert ist, diese Eigenschaft. \diamond

4.8 Zerlegung der Eins und Integration

DEFINITION: INTEGRAL Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum und $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte. Seien g_{jk} die dazugehörigen Koeffizienten der Metrik. Hat $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ die Eigenschaft $\text{supp}(f) \subseteq U$, dann ist

$$\int_M f \, dO := \int_{\varphi(U)} f \circ \varphi^{-1}(u) \sqrt{\det(g_{jk})} \, du^1 \cdots du^n. \quad \triangleright$$

LEMMA 4.26 $\int_M f \, dO$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Karte.

DEFINITION: ZERLEGUNG DER EINS Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von M und sind $(f_j)_{j \in J}$ Funktionen $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$, dann heißt (f_j) eine Zerlegung der Eins zu dieser Überdeckung, wenn gilt:

1. $f_j \geq 0$ in M , $\forall j \exists i : \text{supp}(f_j) \subseteq U_i$, und $\text{supp}(f_j)$ ist kompakt;
2. jedes $p \in M$ besitzt eine Umgebung W , in der nur endlich viele f_j nicht verschwinden;
3. $\sum f_j = 1$. \triangleright

DEFINITION: INTEGRAL Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und ist $(f_j)_{j \in J}$ eine zu einer Überdeckung aus Kartenumgebungen gehörige Zerlegung der Eins, so ist

$$\int_M f \, dO := \sum_{j \in J} \int f \cdot f_j \, dO. \quad \triangleright$$

LEMMA 4.27 *Diese Definition ist von der Auswahl der f_j unabhängig.*

Der folgende Satz gilt genau dann, wenn M parakompakt ist. Für kompaktes M ist der Beweis nicht schwierig.

SATZ 4.28 *Für jedes M und alle offenen Überdeckungen gibt es eine C^r -Zerlegung $(f_j)_{j \in J}$ der Eins ($r = 1, \dots, \infty$). Ist M kompakt, so ist J endlich.*

Daraus folgt ohne Mühe eine schwächere Version des Einbettungssatzes von Whitney:

SATZ 4.29 *Ist M kompakt, so existiert eine Einbettung $g : M \rightarrow \mathbb{R}^m$.*

5. Kapitel

Krümmung in Riemannschen Räumen

5.1 Der Riemannsche Krümmungstensor

DEFINITION: RIEMANNSCHE KRÜMMUNGSTENSOR Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine Riemannsche MF und seien X, Y, Z Vektorfelder auf M . Dann heißt die Abbildung R , definiert durch

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

der Riemannsche Krümmungstensor. Er weist X, Y, Z das Vektorfeld $R(X, Y)Z$ zu. \triangleright

Diese Definition sieht zunächst recht unanschaulich aus. R ist offenbar ein Differentialoperator 2. Ordnung für Vektorfelder. Wir werden jedoch zeigen, daß R ein Tensorfeld ist, d.h. daß R trilinear ist und $(R(X, Y)Z)_p$ nur von X_p, Y_p, Z_p abhängt. Später werden wir einige geometrische Interpretationen von R kennenlernen.

LEMMA 5.1 Für Funktionen $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $R(fX_1 + gX_2, Y)Z = fR(X_1, Y)Z + gR(X_2, Y)Z$, und analog für Y und Z . $R(X, Y)Z$ ist ein $(3, 1)$ -Tensor, und $(R(X, Y)Z)_p$ hängt nur von X_p, Y_p, Z_p ab.

BEWEIS: Die Additivität folgt direkt aus der Definition. Wir berechnen

$$\begin{aligned} [fX, Y]g &= (fX)(Yg) - Y((fX)g) = fXYg - (Yf)(Xg) - f(YXg) \\ &\implies [fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X \\ R(fX, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{fX} \nabla_Y Z + \nabla_{[fX, Y]} Z \\ &= \nabla_Y (f \nabla_X Z) - f \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{f[X, Y] - (Yf)X} Z \\ &= (Yf) \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z + f \nabla_{[X, Y]} Z - (Yf) \nabla_X Z \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $R(X, gY)Z = gR(X, Y)Z$.

$$\begin{aligned} R(X, Y)(hZ) &= \nabla_Y \nabla_X (hZ) - \nabla_X \nabla_Y (hZ) + \nabla_{[X, Y]} (hZ) \\ &= \nabla_Y (XhZ - h \nabla_X Z) - [\dots] + [X, Y]hZ + h \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= YXhZ + Xh \nabla_Y Z - Yh \nabla_Y \nabla_X Z - h \nabla_Y \nabla_X Z - [\dots] + (") \\ &= hR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

In einem lokalen Koordinatensystem mit der Karte $\varphi : M \rightarrow U$ seien $X = x^i \partial_i$, $Y = y^j \partial_j$ und $Z = z^k \partial_k$. Wir setzen $R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = R^l_{ijk} \partial_l$ und erhalten

$$R(X, Y)Z = x^i y^j z^k R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = x^i y^j z^k R^l_{ijk} \partial_l. \quad \square$$

DEFINITION: KOEFFIZIENTEN DES KRÜMMUNGSTENSORS Ist φ eine Karte, so heißen die dazugehörigen Funktionen R_{ijk}^l die *Koeffizienten* des Riemannschen Krümmungstensors bezüglich φ . \triangleright

BEMERKUNG: Die Schreibweise $R(X, Y)Z$ anstelle von $R(X, Y, Z)$ kommt von der Interpretation von R als einer Vereinigung von linearen Abbildungen $R(X_p, Y_p) : T_p M \rightarrow T_p M$, $Z_p \mapsto R(X_p, Y_p)Z_p$ oder bilinearen Abbildungen $R : T_p M \times T_p M \rightarrow \text{End}(T_p M)$.

BEISPIEL: Wir berechnen die Koeffizienten des Krümmungstensors des Levi-Civita-Zusammenhangs:

$$\begin{aligned} R_{ijk}^l \partial_l &= R(\partial_i, \partial_j) \partial_k = \nabla_j \nabla_i \partial_k - \nabla_i \nabla_j \partial_k = \nabla_j (\Gamma_{ik}^r \partial_r) - \nabla_i (\Gamma_{jk}^r \partial_r) \\ &= (\partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{jr}^l - \partial_i \Gamma_{jk}^l - \Gamma_{ir}^l \Gamma_{ij}^r) \partial_l. \end{aligned}$$

Ist der Zusammenhang der induzierte Zusammenhang in einer Teilmannigfaltigkeit, und g eine lokale Parametrisierung, dann sind die dazugehörigen Koeffizienten R_{ijk}^l gegeben durch

$$R_{ijk}^l \partial_l = \left(\frac{\partial}{\partial_j} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^i \partial u^k} \right)^t - \frac{\partial}{\partial_i} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^j \partial u^k} \right)^t \right)^t. \quad \diamond$$

5.2 Wegabhängigkeit der Parallelverschiebung

Wir kommen nun zu einer geometrischen Deutung des Krümmungstensors. Verschiebt man einen Vektor auf einer gekrümmten Fläche parallel, so erhält man für zwei verschiedene Wege zwei verschiedene Resultate. Diese Wegabhängigkeit der geodätischen Parallelverschiebung spiegelt gerade die Krümmung der Fläche wieder. Zunächst benötigen wir ein Lemma.

LEMMA 5.2 Ist $X(t)$ ein Vektorfeld längs der Kurve $c(t)$, so ist

$$\frac{DX}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\text{Pt}_t^0(c) X(t) - X(0) \right)$$

BEWEIS: Sei E_1, \dots, E_n eine ONB in $p = c(0)$ und $E_1(t), \dots, E_n(t)$ die durch geodätische Parallelverschiebung entstehenden ONB bei $c(t)$. Sei ferner $X(t) = x^i(t) E_i(t)$. Pt_t^0 ist eine lineare Abbildung, also ist $\text{Pt}_t^0(c) X(t) = x^i(t) E_i(0)$. Wir leiten ab:

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} X &= \dot{x}^i(t) E_i + x^i(t) \underbrace{\frac{D}{dt} E_i}_{=0} \\ \Rightarrow \frac{D}{dt} X(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^i(t) - x^i(0)}{t} E_i(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\text{Pt}_t^0(c) X(t) - X(0) \right). \quad \square \end{aligned}$$

SATZ 5.3 Sei $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ eine reguläre Abbildung mit $f(0, 0) = p$, $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = X_p$ und $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = Y_p$. Wir bezeichnen mit $\text{Pt}_{u, v_0}^{u', v_0}$ die geodätische Parallelverschiebung längs der u -Linie von (u, v_0) bis (u', v_0) und mit $\text{Pt}_{u_0, v}^{u_0, v'}$ die geodätische Parallelverschiebung längs der v -Linie von (u_0, v) bis (u_0, v') . Dann ist

$$R(X_p, Y_p)Z_p = \lim_{s, t \rightarrow 0} \frac{1}{st} \left(\text{Pt}_{0, s}^{0, 0} \text{Pt}_{t, s}^{0, s} \text{Pt}_{t, 0}^{t, s} \text{Pt}_{0, 0}^{t, 0} Z_p - Z_p \right)$$

BEWEIS: Sei $Z(s, t)$ ein beliebiges Vektorfeld, das $Z_p = Z(0, 0)$ fortsetzt, und seien X, Y Vektorfelder, die $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $Y = \frac{\partial f}{\partial v}$ fortsetzen. Längs $f(U)$ gilt dann $[X, Y] = 0$, denn für $g, h : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$Xg = \frac{\partial g(f(u, v))}{\partial u}, \quad Yg = \frac{\partial g(f(u, v))}{\partial v}, \quad [X, Y]g = XYg - YXg,$$

und es gilt der Satz von Schwarz. Also ist

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z \text{ längs } f.$$

Nach dem vorhergehenden Lemma ist dann

$$\begin{aligned} \nabla_Y \nabla_X Z &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \nabla_X Z(0, s) - \nabla_X Z(0, 0)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \left[\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\text{Pt}_{t,s}^{0,s} Z(t, s) - Z(0, s)) \right) \right. \\ &\quad \left. - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\text{Pt}_{t,0}^{0,0} Z(t, 0) - Z(0, 0)) \right] \\ &= \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1}{st} (\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \text{Pt}_{t,s}^{0,s} Z(t, s) - \text{Pt}_{0,s}^{0,0} Z(0, s) - \text{Pt}_{t,0}^{0,0} Z(t, 0) + Z(0, 0)); \end{aligned}$$

und analog

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1}{st} (\text{Pt}_{t,0}^{0,0} \text{Pt}_{t,s}^{t,0} Z(t, s) - \text{Pt}_{t,0}^{0,0} Z(t, 0) - \text{Pt}_{0,s}^{0,0} Z(0, s) + Z(0, 0)).$$

Man setze $Z(s, t) = \text{Pt}_{t,0}^{t,s} \text{Pt}_{0,0}^{t,0} Z_p$ und bilde $\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y =$

$$R(X, Y)Z = \lim_{s,t \rightarrow 0} \frac{1}{st} (\text{Pt}_{0,s}^{0,0} \text{Pt}_{t,s}^{0,s} \text{Pt}_{t,0}^{t,s} \text{Pt}_{0,0}^{t,0} Z_p - Z_p)$$

□

DEFINITION: FLACHER RIEMANSCHER RAUM Ein Riemannscher Raum ist flach, wenn $R(X, Y)Z = 0$ für alle X, Y, Z . ▷

SATZ 5.4 Die folgenden Aussagen für $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sind äquivalent:

1. $R = 0$, d.h. M ist flach.
2. Die Parallelverschiebung ist lokal wegunabhängig.
3. $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist lokal isometrisch zum euklidischen \mathbb{R}^n .

BEWEIS: (3) \implies (1),(2) sind trivial, und (2) \implies (1) folgt aus dem vorigen Satz. Um (1) \implies (2) zu zeigen, verwenden wir eine Karte $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sei o.B.d.A. $\varphi(p) = (0, \dots, 0)$. Sei Z_p ein Tangentialvektor in p . Erzeuge ein Vektorfeld $Z(u^1, \dots, u^n)$ durch Parallelverschiebung von Z_p längs der Parameterlinien $(0, \dots, 0) \rightarrow (u^1, \dots, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (u^1, \dots, u^n)$.

Nach Konstruktion ist Z ein Parallelfeld längs der u^i -Linien durch die Punkte $(u^0, \dots, u^i, 0, \dots, 0)$. Insbesondere ist Z ein Parallelfeld längs jeder u^n -Linie.

Wir schreiben ' $P(i, j)$ ' für ' $\nabla_i Z(u^1, \dots, u^j, 0, \dots, 0) = 0$ '. Nach Konstruktion gilt ' $P(i, i)$ '. Wir zeigen ' $P(i, j) \implies P(i, j + 1)$ ':

Aus $R = 0$ folgt $\nabla_{j+1} \nabla_i Z = \nabla_i \nabla_{j+1} Z$. Wegen ' $P(j + 1, j + 1)$ ' ist $\nabla_{j+1} Z(u^1, \dots, u^{j+1}, 0, \dots, 0) = 0$, also ist $\nabla_{j+1} \nabla_i Z(u^1, \dots, u^{j+1}, 0, \dots, 0) = 0$, d.h. $\nabla_i Z$ ist ein Parallelfeld längs der u^{j+1} -Linie in den Punkten $(u^1, \dots, u^{j+1}, 0, \dots, 0)$. Das Vektorfeld $\nabla_i Z$ verschwindet bei $(u^1, \dots, u^j, 0, \dots, 0)$ wegen ' $P(i, j)$ '. Nachdem die Parallelverschiebung ein VR-Isomorphismus ist, ist $\nabla_i Z$ längs der ganzen u^{j+1} -Linie gleich 0, also gilt ' $P(i, j + 1)$ '.

Mit Induktion folgt nun ' $P(i, n)$ ', d.h. $\nabla_i Z = 0$ überall in U . Ist $X = x^i \partial_i$, so ist $\nabla_X Z = x^i \nabla_i Z$, also $\nabla_X Z = 0$ überall in U . D.h. Z ist Parallelfeld längs jeder Kurve \implies das Ergebnis der Parallelverschiebung längs jeder Kurve c in U ist gleich dem Wert von Z im Endpunkt, unabhängig von der Kurve.

Für (2) \implies (3) müssen wir die Existenz einer lokalen Parametrisierung zeigen, sodaß die Koeffizienten g_{jk} der Metrik gleich δ_{jk} sind. Wir wählen eine Orthonormalbasis $(E_1)_p, \dots, (E_n)_p$ in $T_p M$, verschieben diese Vektoren (wegunabhängig) parallel, und erhalten so Vektorfelder E_1, \dots, E_n . Wegen (2) gilt $\nabla_{E_i} E_j = 0$, und wegen der Symmetrie von ∇ gilt $[E_i, E_j] = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = 0 - 0 = 0$.

Sei $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ die Abbildung

$$\psi : (v^1, \dots, v^n) \mapsto \text{Fl}_{E_1}^{v^1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{E_n}^{v^n}(p).$$

Nach Konstruktion sind die Ableitungsvektoren der v^1 -Parameterlinien die Vektoren E_1 . Nach Lemma 3.14 ist die Reihenfolge der Flüsse irrelevant, d.h. es gilt $\frac{\partial \psi}{\partial v^i} = E_i$ für alle i . Damit ist $d\psi$ regulär und ψ eine lokale Parametrisierung mit Basisfeldern $\partial_i = E_i$. Die E_i sind Parallelfelder längs jeder Kurve, und daher ist $\langle E_j, E_k \rangle = \langle (E_j)_p, (E_k)_p \rangle = \delta_{jk}$. Die Koeffizienten g_{jk} von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich ψ sind gegeben durch $g_{jk} = \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \langle E_j, E_k \rangle = \delta_{jk}$, was zu zeigen war. \square

SATZ 5.5 Für den Riemannschen Krümmungstensor gelten die folgenden Gleichungen

- (1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
- (2) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$ (Bianchi-Identität)
- (3) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0$
- (4) $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$

BEWEIS: Wir nehmen o.B.d.A. an, daß X, Y, Z, W Basisfelder sind, d.h. o.B.d.A. $[X, Y] = [X, Z] = [Y, Z] = 0$. Das vereinfacht die Rechnungen. \square

Als eine abgeleitete Größe ergibt sich aus dem Krümmungstensor durch Spurbildung der Ricci-Tensor. Für festgehaltenes X, Y ist $R(\cdot, X)Y$ ein $(1, 1)$ Tensor, oder eine lineare Abbildung von $T_p M$ nach $T_p M$. Von dieser linearen Abbildung kann man die Spur bestimmen (in lokalen Koordinaten als Summe der Diagonalelemente der Koeffizientenmatrix). Wir erhalten das folgende $(2, 0)$ -Tensorfeld:

DEFINITION: RICCI-TENSOR $\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(R(\cdot, X)Y)$. \triangleright

Es folgt direkt aus der Definition, daß der Ricci-Tensor tatsächlich ein Tensor ist. In lokalen Koordinaten ergeben sich seine Koeffizienten aus

$$\text{Ric}(\partial_i, \partial_j) = \text{Ric}_{ij} = \sum_k R_{ijk}^j.$$

DEFINITION: SCHNITTKRÜMMUNG Seien $v, w \in T_p M$ zwei linear unabhängige Vektoren. Dann ist die *Schnittkrümmung* wie folgt definiert:

$$K(v, w) = \frac{\langle R(v, w)v, w \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2} \quad \triangleright$$

Die Schnittkrümmung besitzt die folgende interessante Eigenschaft:

LEMMA 5.6 $K(v, w)$ hängt nur von der Ebene ab, die von v, w aufgespannt wird.

BEWEIS: Wir zeigen $K(v, w) = K(w, v) = K(v + \lambda w, w) = K(\lambda v, w)$:

- Die erste Relation folgt aus der Antisymmetrie des Krümmungstensors.
- Die zweite Gleichung folgt aus $\langle R(v + \lambda w, w)(v + \lambda w), w \rangle = \langle R(v, w)v + \lambda R(w, w)v + \lambda R(v, w)w + \lambda^2 R(w, w)w, w \rangle = \langle R(v, w)v, w \rangle$ und $\langle v + \lambda w, v + \lambda w \rangle \langle w, w \rangle - \langle v + \lambda w, w \rangle^2 = (\langle v, v \rangle + 2\lambda \langle v, w \rangle \langle w, w \rangle + \lambda^2 \langle w, w \rangle) \cdot \langle w, w \rangle - (\langle v, w \rangle + \lambda \langle w, w \rangle)^2 = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2$.
- Die dritte Gleichung folgt aus $\langle R(\lambda v, w)\lambda v, w \rangle = \lambda^2 \langle R(v, w)v, w \rangle$ und $\langle \lambda v, \lambda v \rangle \langle w, w \rangle - \langle \lambda v, w \rangle^2 = \lambda^2 (\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2)$. \square

5.3 Jacobi-Felder

Wir befassen uns nun, bildlich gesprochen, mit der Frage 'inwieweit geodätische Linien, die von einem Punkt ausgehen, auseinanderlaufen'. Die Bestimmung dieser geodätischen Abweichung und des Zusammenhangs mit der Krümmung ist ein wesentliches technisches Hilfsmittel beim Studium lokaler und globaler geometrischer Eigenschaften von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

LEMMA 5.7 Seien $I, I' \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und sei $f : I \times I' \rightarrow M$ so, daß $c_u(t) = f(u, t)$ eine geodätische Linie ist. Wir setzen $c(t) = c_0(t)$ und $J(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, t)$. Dann gilt

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot{c}, J)\dot{c} = 0.$$

Zum Beweis benötigen wir

LEMMA 5.8 Für ein Vektorfeld $X(u, t)$ längs $f(u, t)$ gilt

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial u} X - \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial t} X = R\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)X.$$

BEWEIS: Ist f regulär und sein Bild lokal eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, so kann man $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial t}$, und Z zu Vektorfeldern X, Y, Z in M fortsetzen, offensichtlich gilt $[X, Y] = 0$, und die Definition von R liefert das Resultat. Ansonsten muß man eine längere Rechnung durchführen. \square

BEWEIS: (von Lemma 5.7) Es gilt

$$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u}$$

(siehe Lemma 4.7). Nach Voraussetzung ist $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$. Wir wenden die obige Relation und das Lemma an und erhalten

$$0 = \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t} = R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial t} = R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u}. \quad \square$$

DEFINITION: JACOBISCHE DGL., JACOBI-FELD Die Differentialgleichung in Lemma 5.7 heißt *Jacobische Differentialgleichung*. Jedes Vektorfeld, welches die Jacobisch Dgl. erfüllt heißt *Jacobi-Feld* längs der geodätischen Linie c . \triangleright

LEMMA 5.9 Sei $v(u)$ eine Kurve in $T_p M$, und $f(u, t) = \exp_p(t \cdot v(u))$. Mit

$$J(t) = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{u=0}, \quad \frac{\partial}{\partial t} v(0) = w \quad \text{gilt, wenn } \|w\| = 1 :$$

$$\langle J, J \rangle = t^2 - \frac{1}{3} K(v, w)t^4 + o(t^4), \quad \|J(t)\| = t - \frac{1}{6} K(v, w)t^3 + o(t^3).$$

BEWEIS: $J(t)$ ist ein Jacobifeld, weil $f(u, t)$ für festes u eine geodätische Linie ist. Wir benötigen die Ableitungen von $\langle J(t), J(t) \rangle$ an der Stelle $t = 0$. Wir schreiben hier ' sowohl für die kovariante als auch für die gewöhnliche Ableitung nach t längs der Kurve $f(t, 0)$. Wir erhalten der Reihe nach:

- $J = 0$ bei $t = 0$.
- $\langle J, J \rangle' = 2\langle J', J \rangle = 0$ bei $t = 0$.
- $J'(0) = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} f(0, 0) = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} f(0, 0) = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\substack{t=0 \\ u=0}} \exp_p(tv(u)) = \frac{D}{\partial u} v(0) = \dot{v}(0) = w$. Bei der vorletzten Gleichung haben wir verwendet, daß die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes längs einer konstanten Kurve mit der gewöhnlichen Ableitung in $T_p M$ übereinstimmt (dies folgt z.B. aus der Koordinatendarstellung der kovarianten Ableitung).
- $\langle J, J \rangle'' = 2\langle J'', J \rangle + 2\langle J', J' \rangle = 2\langle J', J' \rangle = 2\langle w, w \rangle = 2$ bei $t = 0$.
- $J'' = -R(\dot{c}, J)\dot{c} = 0$ bei $t = 0 \implies \langle J, J \rangle''' = 2\langle J'', J \rangle + 6\langle J', J' \rangle' = 0$ bei $t = 0$.
- $-\langle J, J \rangle'''' = -2\langle J'''' , J \rangle - 8\langle J'''' , J' \rangle - 6\langle J'''' , J'' \rangle = -8\langle J'''' , J' \rangle$
 $= 8\langle \frac{D}{dt} R(\dot{c}, J)\dot{c}, w \rangle = 8\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, w \rangle' - 8\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, w \rangle = 8\langle R(\dot{c}, w)\dot{c}, J \rangle'$
 $= 8\langle \frac{D}{dt} R(\dot{c}, J)\dot{c}, J \rangle + 8\langle R(\dot{c}, w)\dot{c}, J' \rangle = 8\langle R(\dot{c}, w)\dot{c}, w \rangle = 8K(\dot{c}, w)$
 $= 8K(v, w)$ bei $t = 0$.

Damit haben wir die ersten vier Glieder der Taylorreihe von $\langle J, J \rangle$ bestimmt. Für die Wurzel aus $\langle J, J \rangle$ verwenden wir die binomische Reihe $\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha + \dots \square$

Wir werden dieses Lemma anwenden, um zu zeigen, wie sich die Krümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in Abweichungen von der bekannten Euklidischen Elementargeometrie manifestiert:

BEISPIEL: UMFANG EINES GEODÄTISCHEN KREISES Sei $E_1, E_2 \in T_p M$ eine Orthonormalbasis eines zweidimensionalen Unterraumes von $T_p M$. Die Kurve $v : \mathbb{R} \rightarrow T_p M, u \mapsto \cos(u)E_1 + \sin(u)E_2$ beschreibt einen Kreis vom Radius 1 in diesem Unterraum, und $k_r(u) = f(u, r) = \exp_p(r \cdot v(u))$ beschreibt für festes r einen *geodätischen Kreis* vom Radius r um p .

Nachdem $\|\dot{v}(0)\| = 1$ ist, können wir Lemma 5.9 direkt anwenden, um den Umfang $U(r)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} U(r) &= \int_0^{2\pi} \|\dot{k}_r(u)\| du = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial}{\partial u} \exp_p(r \cdot v(u)) \right\| du = \int_0^{2\pi} \|J(u, r)\| du \\ &= \int_0^{2\pi} du \cdot \left(r - \frac{1}{6}K(E_1, E_2)r^3 + o(r^3) \right) \quad (r \rightarrow 0) \implies \\ K(E_1, E_2) &= -6 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^3} \left(\frac{U(r)}{2\pi} - r \right) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{\pi r^3} (2\pi r - U(r)). \end{aligned}$$

D.h. die Schnittkrümmung steht in direkter Beziehung zur Abweichung des Umfanges eines geodätischen Kreises vom euklidischen Maß $2\pi r$. \diamond

BEISPIEL: FLÄCHE EINES GEODÄTISCHEN KREISES Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie im vorigen Beispiel und bestimmen die Fläche des geodätischen Kreises k_R . Dessen Inneres ist parametrisiert durch

$$f : [0, 2\pi] \times [0, R] \rightarrow M, \quad (r, u) \mapsto k_r(u) = \exp_p(r \cdot v(u)).$$

Die Koeffizienten g_{rr}, g_{ru}, g_{uu} der Metrik sind wie folgt:

$$g_{rr} = \left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\|^2 = 1, \quad g_{ru} = 0 \quad \text{nach Satz 4.18,} \quad g_{uu} = \langle J(u), J(u) \rangle.$$

Nun ist die Fläche gegeben durch

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{rr}g_{uu} - g_{ur}^2} \, du \, dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} \|J(u)\| \, du \, dr = \int_0^R U(r) \, dr \\ &= 2\pi \int_0^R \left(r - \frac{1}{6}K(E_1, E_2)r^3 + o(r^3) \right) \, dr \\ &= \pi R^2 - \frac{1}{12}\pi K(E_1, E_2)R^4 + o(R^4) \quad (R \rightarrow 0) \implies \\ K &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{12}{\pi R^4} (\pi R^2 - A(R)) \end{aligned}$$

D.h. die Schnittkrümmung ist in direkter Beziehung zur Abweichung der Fläche eines geodätischen Kreises von dem bekannten euklidischen Maß. \diamond

DEFINITION: RIEMANNSCHE TEILMANNIGFALTIGKEIT Ist $(\tilde{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum und $M \subseteq \tilde{M}$ eine TMF, so heißt M versehen mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle|_{M \times M}$ *Riemannsche Teilmannigfaltigkeit* von \tilde{M} . \triangleright

LEMMA 5.10 Sind $E_1, E_2 \in T_p \tilde{M}$, dann hat die Riemannsche Teilmannigfaltigkeit $M = \exp_p(\mathbb{R}E_1 + \mathbb{R}E_2)$ in $p \in M$ dieselbe Schnittkrümmung $K(E_1, E_2)$ wie in $p \in \tilde{M}$.

BEWEIS: Die von p ausgehenden geodätischen Linien tangential an $\mathbb{R}E_1 + \mathbb{R}E_2$ stimmen für M und \tilde{M} überein (lokal sind sie für beide Mannigfaltigkeiten die kürzesten Verbindungen zu p), und damit auch die Umfänge $U(r)$ von geodätischen Kreisen. Die Gleichheit der Schnittkrümmungen folgt aus dem vorigen Beispiel. \square

5.4 Konjugierte Punkte und minimale geodätische Linien

DEFINITION: KONJUGIERTE PUNKTE Ist c geodätische Linie und existiert ein Jacobifeld $J \neq 0$ längs c mit $J(a) = J(b) = 0$, so heißen $c(a)$ und $c(b)$ *zueinander konjugierte Punkte* längs c . \triangleright

Bildlich gesprochen, schneiden einander 'infinitesimal benachbarte' geodätische Linien, die von $c(a)$ ausgehen, einander im Punkt $c(b)$.

LEMMA 5.11 Die Jacobi-Felder längs c bilden einen $2n$ -dimensionalen Vektorraum und sind für beliebiges a durch $J(a)$ und $\frac{D}{dt} J(a)$ eindeutig festgelegt.

BEWEIS: Sind E_1, \dots, E_n linear unabhängige Parallelfelder längs einer geodätischen Linie c mit $E_1 = \dot{c}$, dann setzen wir $J(t) = x^j(t)E_j(t)$. Es gilt $\frac{D}{dt} J = \dot{x}^j(t)E_j(t)$ und $\frac{D^2 J}{dt^2} = \ddot{x}^j(t)E_j(t) = R(\dot{c}, J)\dot{c}$.

$$\implies \ddot{x}^j E_j + x^j R(E_1, E_j)E_1 = 0$$

D.h. wir erhalten eine lineare Dgl. 2. Ordnung für die Koeffizientenfunktionen $x^j(t)$. Es existiert ein $2n$ -dim. Vektorraum von Lösungen, und jede Lösung ist durch die Anfangsbedingungen $J(a) = x^j(a)E_j(a)$ und $\frac{D}{dt} J = \dot{x}^j(a)E_j(a)$ eindeutig bestimmt. \square

LEMMA 5.12 Jedes Jacobifeld längs eine Geodätischen entsteht auf die Weise wie in Lemma 5.7 angegeben

BEWEIS: Durch die Konstruktion in Lemma 5.7 kann man einen $2n$ -dimensionalen Vektorraum von Vektorfeldern längs c erzeugen: Mit der dortigen Notation ist $J(0) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$. Aus dem Beweis von 5.9 sehen wir, daß im Fall $f(u, 0) = \text{const}$ gilt $J'(0) = \frac{d}{du}(\frac{\partial f}{\partial t}(u, 0))$. \square

FOLGERUNG: Sei c eine geodätische Linie mit $c(0) = p$. Es gibt ein Jacobifeld J längs c mit $J(0) = 0$ und einer weiteren Nullstelle bei $J(r)$ genau dann, wenn $\exp_p(r \cdot \dot{c}(0))$ singularär ist. \square

Der folgende Satz ist wesentlich für globale Probleme in der Riemannschen Geometrie:

SATZ 5.13 Ist c eine geodätische Linie und liegt zwischen $c(a)$ und $c(b)$ ein zu $c(a)$ konjugierter Punkt, so ist c nicht die kürzeste Verbindung zwischen $c(a)$ und $c(b)$ in der Klasse der stückweise differenzierbaren Kurven, die $c(a)$ und $c(b)$ verbinden.

BEMERKUNG: Ist $K(v, w) \geq \frac{1}{r^2}$ für alle $v, w \in TM$, oder ist $\frac{1}{n-1} \text{Ric}(v, v) \geq \frac{1}{r^2}$ für alle $v \in TM$ mit $\|v\| = 1$, so ist der erste konjugierte Punkt höchstens πr entfernt. Ist die MF vollständig, so ist daher ihr Durchmesser $\text{diam}(M) \leq \pi r$ (Satz von Bonnet/Meyers).

SATZ 5.14 Ist $K(v, w) \leq 0$ in M , so existieren keine konjugierten Punkte.

BEWEIS: Sei J ein Jacobifeld längs der geodätischen Linie $c(t)$. Wir verwenden $'$ für Ableitungen nach t längs c . Dann ist $\langle J, J \rangle'' = 2\langle J'', J \rangle + 2\langle J', J' \rangle \geq -2\langle R(\dot{c}, J)\dot{c}, J \rangle \geq 0$. D.h. $\langle J, J \rangle'$ ist streng monoton steigend. Aus der Taylorentwicklung von $\langle J, J \rangle$ um eine Nullstelle folgt $\langle J, J \rangle = t^2 - \dots \implies \langle J, J \rangle' = |t - \dots| \implies \langle J, J \rangle'$ ist positiv in einer Umgebung einer Nullstelle $\implies \langle J, J \rangle$ ist streng monoton außerhalb von Nullstellen $\implies J$ kann nur eine Nullstelle besitzen. \square

FOLGERUNG: Ist $K(v, w) \leq 0$ in M , dann ist \exp_p global regulär für alle p und nicht nur lokal. \square

BEMERKUNG: Ist M zusätzlich einfach zusammenhängend, dann ist \exp_p ein Diffeomorphismus, d.h. M ist diffeomorph zum \mathbb{R}^n (Satz von Cartan-Hadamard).

5.5 Riemannsche Teilmannigfaltigkeiten

Wir betrachten Teilmannigfaltigkeiten von Riemannschen Räumen. Für den \mathbb{R}^n haben wir das bereits getan — beim Studium von Kurven und Flächen im euklidischen Raum (siehe Kap. 1 und 2).

Die Definition von 'Riemannscher Teilmannigfaltigkeit' erfolgte bereits auf S. 47.

DEFINITION: ISOMETRISCHE IMMERSION Ist $f : M \rightarrow \tilde{M}$ regulär und ist $\langle V, W \rangle_M = \langle df(V), df(W) \rangle_{\tilde{M}}$, so heißt f isometrische Immersion. Ist f bijektiv, so heißt f Isometrie. \triangleright

Formal ist die Einbettung einer Riemannschen Teilmannigfaltigkeit in einen Riemannschen Raum eine isometrische Immersion.

Wir werden nun einige Begriffe, die wir für Flächen im euklidischen Raum bereits definiert haben, auf Riemannsche Räume übertragen.

DEFINITION: ORTHOGONALRAUM Ist M Riemannsche Teilmf. von \tilde{M} , so heißt das orthogonale Komplement $\perp_p M$ von $T_p M$ in $T_p \tilde{M}$ der Orthogonalraum von M in p . ▷

DEFINITION: INDUZIERTER ZUSAMMENHANG, II. FUNDAMENTALFORM $M \subseteq \tilde{M}$ sei eine Riemannsche TMF, $\tilde{\nabla}$ sei ein Zusammenhang in \tilde{M} . Wir bezeichnen mit

$$\pi_M : T_p \tilde{M} \longrightarrow T_p M, \quad \pi_M^\perp : T_p \tilde{M} \longrightarrow \perp_p M$$

die Projektion von $T_p \tilde{M}$ auf $T_p M$ und die dazu orthogonale Projektion. Sei ferner für ein Vektorfeld Y auf M \tilde{Y} ein beliebiges Vektorfeld, welches Y auf \tilde{M} fortsetzt. Dann heißt $\nabla_X Y := \pi_M(\tilde{\nabla}_X \tilde{Y})$ der von $\tilde{\nabla}$ induzierte Zusammenhang. Die Normalkomponente $\pi_M^\perp(\nabla_X Y)$ heißt die II. Fundamentalform:

$$II(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y.$$

▷

BEMERKUNG: $\nabla_X Y$ ist wohldefiniert, denn sind \tilde{Y} und \bar{Y} zwei verschiedene Erweiterungen von Y und ist $c : I \rightarrow M$ eine Kurve mit $\dot{c}(0) = X_p$, so ist

$$\nabla_{X_p} \tilde{Y} = \frac{D}{dt} \tilde{Y} \circ c(0) = \frac{D}{dt} \bar{Y} \circ c(0) = \nabla_{X_p} \bar{Y}$$

weil auf beiden Seiten nur Werte von Y entlang c eingehen.

LEMMA 5.15 Sind X, Y Vektorfelder in M und \tilde{X}, \tilde{Y} Fortsetzungen nach \tilde{M} , so ist $[\tilde{X}, \tilde{Y}]|_M = [X, Y]$. Insbesondere ist die Lieklammer tangential zu M .

BEWEIS: Wir verwenden eine Karte $\varphi : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, in der $\varphi(M) \subseteq \mathbb{R}^m \times 0$. Sei $\tilde{X} = x^i \partial_i$ und $\tilde{Y} = y^j \partial_j$. Wir wissen, daß $x^i(u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0) = 0$ für $i > m$ und $y^j(u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0)$ für $j > m$ gilt. Die ersten m Komponenten dienen als Karte für M , bzw. als Koordinaten für X und Y . Die Aussage folgt aus

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}](u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0) &= (x^i \partial_i y^j - y^i \partial_i x^j) \partial_j (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0) \\ &= (\ast, \dots, \ast, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

□

LEMMA 5.16 Ist $\tilde{\nabla}$ ein symmetrischer Zusammenhang, dann ist

$$II(X, Y) : T_p M \times T_p M \longrightarrow \perp_p M$$

eine symmetrische Bilinearform. $II(X, Y)_p$ hängt nur von X_p, Y_p ab.

BEWEIS: $II(X, Y) - II(Y, X) = \pi_M^\perp(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X) = \pi_M^\perp([X, Y]) = 0$. Nach Konstruktion geht von X in $II(X, Y)$ nur der Wert X_p ein. Wegen der Symmetrie von Y auch nur der Wert Y_p . □

SATZ 5.17 Ist $\tilde{\nabla}$ in \tilde{M} der Levi-Civita-Zusammenhang, dann ist es auch ∇ in M .

BEWEIS: $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ seien Vektorfelder, die X, Y, Z nach \tilde{M} fortsetzen. Die Symmetrie folgt aus

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \pi_M(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}} \tilde{X}) = \pi_M([\tilde{X}, \tilde{Y}]) = [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [X, Y].$$

Zur Verträglichkeit mit der Metrik:

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z \rangle &= \tilde{X}\langle \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, \tilde{Z} \rangle + \langle \tilde{Y}, \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Z} \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \text{II}(X, Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle Y, \text{II}(X, Y) \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \end{aligned}$$

Nach Lemma 4.12 ist ∇ ein Riemannscher Zusammenhang. □

LEMMA 5.18 GLEICHUNG VON WEINGARTEN Ist $N : M \rightarrow \perp M$ ein Normalvektorfeld, d.h. $N_p \in \perp_p M$, so gilt für $X, Y \in T_p M$

$$\langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle N, \text{II}(X, Y) \rangle$$

Insbesondere hängt die linke Seite der Gleichung nur von X_p, Y_p, N_p ab.

BEWEIS: $\langle N, Y \rangle = 0$ in $M \implies 0 = X\langle N, Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \tilde{\nabla}_X Y \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \nabla_X Y + \text{II}(X, Y) \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \text{II}(X, Y) \rangle.$ □

LEMMA 5.19 LEMMA VON GAUSS Ist $M \subseteq \tilde{M}$ eine Riemannsche TMF und sind R und \tilde{R} die entsprechenden Riemannschen Krümmungstensoren, so gilt

$$\langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle - \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \text{II}(X, W), \text{II}(Y, Z) \rangle - \langle \text{II}(X, Z), \text{II}(Y, W) \rangle.$$

BEWEIS: Da nur Tensoren bzw. Bilinearformen vorkommen, reicht es aus, die Behauptung für die Basisfelder $\partial_1, \dots, \partial_n$ bezüglich einer Karte zu zeigen. Seien also X, Y, Z, W Basisfelder $\implies [,] = 0$ für X, Y, Z, W . Wir berechnen

$$\begin{aligned} \langle \tilde{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z, W \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_Y \nabla_X Z + \text{II}(X, Z), W \rangle - \langle \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \text{II}(Y, Z)), W \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_Y \nabla_X Z, W \rangle + \langle \tilde{\nabla}_Y \text{II}(X, Z), W \rangle - \tilde{X} \leftrightarrow Y \\ &= \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle + \underbrace{\langle \text{II}(Y, \nabla_X Z), W \rangle}_{\in \perp_p M} - \underbrace{\langle \text{II}(X, Z), \text{II}(Y, W) \rangle}_{\text{Lemma 5.18}} - \tilde{X} \leftrightarrow Y \\ &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \text{II}(X, Z), \text{II}(Y, W) \rangle + \langle \text{II}(Y, Z), \text{II}(X, W) \rangle. \end{aligned}$$

□

Dieses Lemma führt sofort zu folgendem herausragenden Satz¹

SATZ 5.20 ('THEOREMA EGREGIUM' VON GAUSS) Die Gaußsche Krümmung einer Fläche im \mathbb{R}^3 stimmt mit ihrer Schnittkrümmung überein. Sie ist insbesondere eine Größe der inneren (Riemannschen) Geometrie der Fläche und unabhängig von der speziellen isometrischen Immersion dieser Riemannschen Mannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^3 .

¹: ...sponte perducit ad hoc egregium THEOREMA: Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet., C.F. Gauß, *disquisitiones circa superficies curvas*, Göttingen, 1827, p. 24. Zu deutsch: Wenn eine gekrümmte Fläche in eine beliebige andere Fläche verbogen wird, bleibt das Maß der Krümmung in den einzelnen Punkten unverändert.

BEWEIS: Sei M eine $(n - 1)$ -dim. Fläche im $\mathbb{R}^n = \tilde{M}$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung und $n : M \rightarrow S^{n-1}$ die sphärische Abbildung. $\perp_p M$ ist dann eindimensional und wird von $n(p)$ aufgespannt. Damit gilt

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \left\langle n(p), \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle = \langle n(p), \tilde{\nabla}_i \partial_j \rangle = \langle n(p), \nabla_i \partial_j + \text{II}(\partial_i, \partial_j) \rangle \\ &= \langle \text{II}(\partial_i, \partial_j), n(p) \rangle \implies \text{II}(\partial_i, \partial_j) = h_{ij} n(p) \end{aligned}$$

Sei o.B.d.A. $g_{jk}(p) = \delta_{jk}$. Dann ist die Gaußsche Krümmung $K(p) = \det(h_{ij}) = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$. Die Schnittkrümmung $K(v, w)$ ist unabhängig von v, w :

$$K(\partial_1, \partial_2) = \frac{\langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle}{\langle \partial_1, \partial_1 \rangle \langle \partial_2, \partial_2 \rangle - \langle \partial_1, \partial_2 \rangle^2} = \langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle$$

Mit dem Lemma von Gauß und $\tilde{R} = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} 0 - K(\partial_1, \partial_2) &= \langle \tilde{R}(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle - \langle R(\partial_1, \partial_2)\partial_1, \partial_2 \rangle \\ &= \langle \text{II}(\partial_1, \partial_2), \text{II}(\partial_2, \partial_1) \rangle - \langle \text{II}(\partial_1, \partial_1), \text{II}(\partial_2, \partial_2) \rangle \\ &= \langle -h_{12}n(p), -h_{12}n(p) \rangle - \langle -h_{11}n(p), -h_{22}n(p) \rangle \\ &= h_{12}h_{12} - h_{11}h_{22} = -K(p) \quad \square \end{aligned}$$

BEMERKUNG: Für jede zweidim. Riemannsche MF heißt ihre Schnittkrümmung Gaußsche Krümmung. Vgl. Lemma 5.10 — die Schnittkrümmung $K(v, w)$ ist die Gaußkrümmung der Fläche $\exp_p(\mathbb{R}v + \mathbb{R}w)$.

BEMERKUNG: ELEMENTARSYMMETRISCHE FUNKTIONEN Die Menge $\{\kappa_1, \dots, \kappa_n\}$ ist durch das Polynom $\prod_{i=1}^n (t - \kappa_i)$ eindeutig bestimmt und umgekehrt. Die Koeffizienten dieses Polynoms sind bis auf das Vorzeichen die *elementarsymmetrischen Funktionen* von $\kappa_1, \dots, \kappa_n$, nämlich die

0.-te	1		t^n
1.-te	$\kappa_1 + \dots + \kappa_n$		$-t^{n-1}$
2.-te	$\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \dots + \kappa_{n-1}\kappa_n$		t^{n-2}
⋮	⋮		⋮
n.-te	$\kappa_1 \dots \kappa_n$		$\pm t^0$

SATZ 5.21 (THEOREMA EGREGIUM) Ist $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine n -dim. Fläche mit der induzierten Metrik, Ist $K^{(j)}$ die j -te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_n$, so ist $K^{(j)}$ für j gerade und $|K^{(i)}|$ für $i \geq 3$ und i ungerade nur von der Riemannsche Metrik abhängig.

5.6 Der Integralsatz von Gauß-Bonnet

DEFINITION: ORIENTIERUNG M sei orientierbar, wenn es eine Überdeckung durch Karten $\varphi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, sodaß $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ orientierungserhaltend ist (d.h. die Jacobi-Determinante des Parameterwechsels positiv ist). Eine Basis v_1, \dots, v_n von $T_p M$ heißt *positiv orientiert*, wenn für eine (und dann jede) Karte φ_j die Vektoren $d\varphi_j(v_1), \dots, d\varphi_j(v_n)$ im \mathbb{R}^n positiv orientiert sind. \triangleright

DEFINITION: GEODÄTISCHE KRÜMMUNG Ist M eine orientierte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, und $c : I \rightarrow M$ eine Kurve, dann sei das Vektorfeld $m(t)$ längs c so gewählt, daß $\dot{c}(t)/\|\dot{c}(t)\|, m(t)$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von $T_{c(t)}M$ ist. Die orientierte geodätische Krümmung von c ist definiert durch

$$c_1 = \dot{c}/\|\dot{c}\|, \quad \frac{D}{dt} c_1 = \|\dot{c}\| \kappa_g m. \quad \triangleright$$

Offenbar ist der Betrag der orientierten geodätischen Krümmung gleich der früher definierten geodätischen Krümmung von Kurven (siehe pp. 13, 33). κ_g ist von der Parametrisierung von c unabhängig.

DEFINITION: ZULÄSSIGES GEBIET Sei M eine orientierte 2-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit und c eine geschlossene, stückweise differenzierbare Kurve, die in einem Parametergebiet liegt, und ein einfach zusammenhängendes Gebiet berandet. Seien α_i die Drehwinkel von \dot{c} an den Stellen, wo c nicht differenzierbar ist, gemessen im mathematisch positiven Sinn. Dies sei ein 'zulässiges Gebiet G , berandet von einer Kurve c mit Eckenwinkeln α_i '. \triangleright

LEMMA 5.22 *Betrachte ein zulässiges Gebiet G , berandet von einer Kurve c und Eckenwinkeln α_i . Verschieben wir einen Vektor $v \in T_p M$ mit $c(0) = c(1) = p$ geodätisch parallel, dann ist der Gesamt-Drehwinkel von $v(t)$ gegenüber ∂_1 gleich*

$$\angle(v, \text{Pt}_0^1(c)(v)) = \oint_c \kappa_g ds + \sum \alpha_i - 2\pi.$$

BEWEIS: Wir betrachten eine positiv orientierte ONB $E_1(t), E_2(t)$ längs c , die durch geodätische Parallelverschiebung aus einer positiv orientierten ONB in $c(0)$ hervorgeht. O.B.d.A. sei c nach der Bogenlänge parametrisiert. Sei $\dot{c} = \cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2$, wobei φ den Drehwinkel von \dot{c} in der Basis E_1, E_2 mißt. Dann ist $m = -\cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2$, $\frac{D}{dt} \dot{c} = -\dot{\varphi} \sin \varphi E_1 + \dot{\varphi} \cos \varphi E_2$, also $\dot{\varphi} = \kappa_g$ längs der glatten Segmente von c . Daraus folgt $\oint_c \kappa_g ds + \sum \alpha_i = \varphi(1) - \varphi(0)$.

Es ist bekannt, daß im Falle des euklidischen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ im Parameterbereich der Gesamt-Drehwinkel ψ von \dot{c} gegenüber ∂_1 gleich 2π ist (Umlaufsatz von Hopf). Nachdem $\psi \in 2\pi\mathbb{Z}$ und ψ bei stetiger Variation von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stetig variiert, bleibt ψ für alle Skalarprodukte $\langle \cdot, \cdot \rangle_t = (1-t) \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle_0 + t \langle \cdot, \cdot \rangle$ gleich 2π .

Der Gesamt-Drehwinkel von $v(t)$ gegenüber ∂_1 ist gleich dem Winkel von $v(t)$ gegenüber \dot{c} minus dem Winkel von \dot{c} gegenüber ∂_1 , also $(\varphi(1) - \varphi(0)) - 2\pi$. \square

Der folgende Satz ist eine lokale, nicht-infinitesimale Variante von Satz 5.3:

SATZ 5.23 (INTEGRALFORMEL VON GAUSS-BONNET) *Betrachte ein zulässiges Gebiet G , berandet von einer Kurve c mit Eckenwinkeln α_i . Dann gilt*

$$\oint_c \kappa_g ds + \sum_{\alpha_i} = 2\pi - \int_G K dO.$$

Der Satz gilt auch dann, wenn G nicht in einem Kartengebiet liegt.

SATZ 5.24 ('THEOREMA ELEGANTISSIMUM' VON GAUSS) *Die Summe der Innenwinkel in einem geodätischen Dreieck Δ (ein zulässiges Gebiet, das von drei geodätischen Linien berandet wird) ist gleich*

$$\pi + \int_{\Delta} K dO.$$

BEWEIS: Wir wenden die Integralformel von Gauß-Bonnet an. Die Innenwinkel β_i und die Eckenwinkel α_i stehen in der Relation $\beta_i = \pi - \alpha_i$. Die geodätische Krümmung von geodätischen Linien verschwindet. Damit ist

$$(\pi - \beta_1) + (\pi - \beta_2) + (\pi - \beta_3) = 2\pi - \int_{\Delta} K dO. \quad \square$$

SATZ 5.25 (SATZ VON GAUSS-BONNET) Ist M eine 2-dimensionale orientierbare kompakte Mannigfaltigkeit, trianguliert durch zulässige Gebiete, Seien e , f , k die Anzahl der Ecken, Flächen, und Kanten dieser Triangulierung. so ist

$$\int_M K = 2\pi(e + f - k) = 2\pi\chi(M).$$

BEWEIS: Wir wenden die Integralformel von Gauß-Bonnet auf jedes Gebiet der Triangulierung an und bilden die Summe. \square

Der Satz gilt auch dann, wenn die einzelnen Gebiete nicht in einer Kartenumgebung enthalten sind.

SATZ 5.26 Sei M wie in Satz 5.25. Dann besitzt M eine Triangulierung wie in 5.25 gefordert.

FOLGERUNG: Das Oberflächenintegral der Gaußschen Krümmung ist von der Riemannschen Metrik unabhängig, und ist ein Element von $2\pi\mathbb{Z}$. \square

FOLGERUNG: Die Größe $e + f - k = \chi(M)$ ist von der Triangulierung unabhängig, und daher eine differentialtopologische Invariante. \square

FOLGERUNG: Ist $\chi(M) \neq 0$, so gibt es auf M keine Riemannsche Metrik mit verschwindender Krümmung. Das Nichtverschwinden von $\chi(M)$ stellt ein Hindernis ('obstruction') dar. \square

Als Kuriosum (wir werden keinen Versuch machen, dies zu beweisen) sei die mehrdimensionale Variante des Satzes von Gauß-Bonnet angeführt:

DEFINITION: KRÜMMUNGSFORMEN Ist $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Karte für M , und $\partial_1, \dots, \partial_n$ die dazugehörigen Basisfelder, so sei $\Omega_i^j(v, w)$ die Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $R(v, w)$ bezüglich der Basis $\partial_1, \dots, \partial_n$. \triangleright

Offenbar ist Ω_i^j ein alternierendes Tensorfeld in \mathfrak{X}_2U , denn $R(v, w) = -R(w, v)$.

SATZ 5.27 (Gauß-Bonnet-Chern-Allendörfer-Fenchel) Für eine kompakte differenzierbare $2m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist die skalare Funktion $k : M \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$k\sqrt{\det(g_{jk}(p))} \cdot \det(\cdot) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma=(i_1, \dots, i_n) \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \Omega_{i_1}^{i_2} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{n-1}}^{i_n}(\cdot),$$

tatsächlich wohldefiniert (d.h. das Keilprodukt ist, als Multilinearform in T_pM , tatsächlich ein Vielfaches der Determinante, und k ist unabhängig von der Auswahl der Karte φ). Dann gilt

$$\chi(M) = \frac{2(2m-1)!}{2^{2m}\pi^m(m-1)!} \int_M k dO,$$

wobei $\chi(M)$, die Euler-Charakteristik, eine ganzzahlige topologische Invariante von M ist.

6. Kapitel

Beispiele für Anwendungen der Differentialgeometrie in der Physik

6.1 Mechanik

Der Hamilton-Formalismus in der Mechanik ist ein Beispiel für die Anwendung des Konzeptes einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit einer symplektischen Bilinearform. Obwohl dies das prominenteste Beispiel ist, werden wir darauf nicht eingehen.

Verbindungen zwischen der Riemannschen Geometrie und der Mechanik basieren z.B. auf einer Analogie von Variationsprinzipien.

DEFINITION: KONFIGURATIONSRAUM, KINETISCHE ENERGIE, POTENTIELLE ENERGIE Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Riemannscher Raum. Wir interpretieren M als Menge der Zustände eines mechanischen Systems. Kurven $c : I \rightarrow M$ sind Zustandsänderungen. $T(v) := \langle v, v \rangle$ heißt die kinematische Energie. Weiters sei $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Die Funktion U heißt potentielle Energie. \triangleright

BEMERKUNG: Ein solches Modell beschreibt ein 'holonomes System', d.h. eines, das infinitesimal wie global dieselben Freiheitsgrade besitzt. Ein 'nichtholonomes System' (wie z.B. ein Fahrrad auf einer Straße), erlaubt Zustandsänderungen nicht in jede Richtung (außer bei Glatteis). Modelle für nichtholonome Systeme sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten, wo in jedem Punkt $p \in M$ ein zulässiger Unterraum von $T_p M$ ausgezeichnet ist.

BEISPIEL: Der Zustand eines ebenen Doppelpendels wird durch 2 Winkel φ_1, φ_2 beschrieben. Der Konfigurationsraum ist also $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$. Karten für diese Mannigfaltigkeit sind die Abbildungen $(\varphi_1, \varphi_2) \pmod{2\pi} \mapsto (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2$. Die skalaren Funktionen $\sin \varphi_1, \cos \varphi_2$ sind Beispiele für in M wohldefinierte differenzierbare Funktionen.

Um das Beispiel zu konkretisieren, seien die Massen der beiden Pendel m_1, m_2 , die Abstände der Schwerpunkte vom Aufhängepunkt s_1, s_2 , die ebenen Massenträgheitsmomente I_1, I_2 , und die Länge des 1. Pendels sei l_1 . Dann ist (Mechanik-Übungsbeispiel)

$$U(\varphi_1, \varphi_2) = g(m_1 s_1 \cos \varphi_1) + m_2(l_1 + s_2) \cos \varphi_2,$$

$$T_{\varphi_1, \varphi_2}(\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) = [\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2] \begin{bmatrix} l_1 + m_1 s_1^2 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 s_2^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ \text{symm.} & l_2 + m_2 s_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \diamond$$

DEFINITION: D'ALEMBERTSCHES PRINZIP Sei M wie oben, und seien $p, q \in M$. Eine Bahn in M sei ein kritischer Punkt für das Funktional $\int(T - U)$ in der Klasse der glatten Kurven, die p mit q verbinden. \triangleright

BEMERKUNG: In der Physik ist diese Definition manchmal ein 'Satz', der einer Herleitung bedarf.

DEFINITION: GRADIENT Ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, so ist $\text{grad } f$ das Vektorfeld mit $\langle v, \text{grad } f(p) \rangle = df(v)$ für alle $v \in T_p M$. \triangleright

BEMERKUNG: Sei in lokalen Koordinaten $\text{grad } f = w^j \partial_j$. Wir berechnen w^j aus der Definitionsgleichung von $\text{grad } f$: Die Definitionsgleichung von $\text{grad } f$ lautet

$$v^i \partial_i f = \langle v^k \partial_k, w^j \partial_j \rangle = v^k w^j g_{jk}, \implies w^j = g^{jk} \partial_k f.$$

LEMMA 6.1 Eine Bahn c löst die Differentialgleichung $\frac{D\dot{c}}{dt} = -\frac{1}{2} \text{grad } U$.

BEWEIS: Sei c_u eine Variation von c mit Variationsvektorfeld V . Wir verwenden Lemma 4.22 und berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \Big|_{u=0} \int (T - U) dt &= -2 \int \langle V, \frac{D\dot{c}}{dt} \rangle dt - \int \frac{\partial U}{\partial u}(c_u(t)) dt \\ &= \int \langle V, -2 \frac{D\dot{c}}{dt} - \text{grad } U \rangle dt. \end{aligned}$$

c ist ein kritischer Punkt für das Funktional $\int (T - U)$, wenn $\langle 2 \frac{D\dot{c}}{dt} + \text{grad } U, V \rangle = 0$ für alle V . \square

BEMERKUNG: Eine allgemeinere Variante dieser Differentialgleichung ist $\frac{D\dot{c}}{dt} = \frac{1}{2} F$, wobei F ein 'Kraft'-Vektorfeld auf M ist.

LEMMA 6.2 LAGRANGESCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN In lokalen Koordinaten ist $T(\dot{c}) = \dot{c}^k \dot{c}^k g_{jk}$, und wir haben

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{c}^j} - \frac{\partial T}{\partial c^j} = \frac{\partial U}{\partial c^j} \iff \frac{D\dot{c}}{dt} = -\frac{1}{2} \text{grad } U.$$

BEWEIS: Anschreiben in lokalen Koordinaten und Verwenden der expliziten Formel für Γ_{jk}^i aus Satz 4.14. \square

DEFINITION: GESAMTENERGIE Die Gesamtenergie einer Zustandsänderung c zum Zeitpunkt t ist definiert als die Funktion $T(\dot{c}) + U$ längs c . \triangleright

LEMMA 6.3 ENERGIEERHALTUNGSSATZ Für eine Bahn gilt $h = T(\dot{c}) + U = \text{const}$ längs c .

BEWEIS: $\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt}(\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle + U) = 2 \langle \frac{D\dot{c}}{dt}, \dot{c} \rangle + \frac{d}{dt} U(c(t)) = -\langle \text{grad } U, \dot{c} \rangle + \langle \text{grad } U, \dot{c} \rangle = 0$. \square

DEFINITION: METRIK NACH JACOBI Sei M wie oben und $h \in \mathbb{R}$. Dann ist $\langle v, w \rangle' := 2(h - U)\langle v, w \rangle$ die Metrik nach Jacobi, und $M' = \{p \in M \mid h - U(p) > 0\}$. Dann ist $(M', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. \triangleright

Der folgende Satz macht es möglich, allgemeine Sätze über geodätische Linien auf Bahnen von mechanischen Systemen zu übertragen:

SATZ 6.4 c ist Bahn von $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit Energie h genau dann, wenn c (nach Umparametrisierung auf $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ -Bogenlänge \tilde{s}) geodätische Linie von $(M', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ ist.

BEWEIS: Man kann nachrechnen, daß gilt

$$(\Gamma'_{ij})' = \Gamma'_{ij} + \frac{1}{2(h-U)} (\delta'_i \partial_j (h-U) + \delta'_j \partial_i (h-U) - g^{lr} g_{ij} \partial_r (h-U)).$$

Die Parametertransformation $\tilde{c} = c \circ \gamma$ auf $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -Bogenlänge erfüllt die Relation

$$\frac{d\tilde{s}}{ds} = 2(h-U) \implies \frac{d^2\tilde{s}}{ds^2} = 2\partial_r (h-U) \dot{c}^r.$$

Einsetzen liefert die Behauptung. □

BEISPIEL: VOLLSTÄNDIGKEIT Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, U)$ der Konfigurationsraum für ein mechanisches System, und seien p, q zwei Zustände. Ist $h > U$ in M und M kompakt, dann ist $M' = M$, M' ist kompakt, daher geodätisch vollständig, und es gibt nach dem Satz von Hopf und Rinow (Satz 4.25) eine Bahn der Energie h , die die Zustände p und q verbindet. ◇

BEISPIEL: STABILITÄT DER BAHNEN Sind $x(s, t)$ für $s = \text{const.}$ Bahnen von Punkten $x(s)$ mit vorgegebenen Anfangswerten $\frac{\partial x}{\partial t}(s, 0)$, so folgt aus Satz 6.4, daß die 'infinitesimale Abweichung' $\frac{\partial x}{\partial s}(0, t)$ der 'benachbarten' Bahnen von einer ausgezeichneten Bahn $c(t) = x(0, t)$ ein Jacobifeld bezüglich der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist, und daher die Differentialgleichung

$$\frac{(D')^2 \partial x}{\partial t^2} = R'(\dot{c}, \frac{\partial x}{\partial s}) \dot{c}$$

erfüllt. Die lineare Abbildung $R'(\dot{c}, \cdot) \dot{c}$ ist dabei verantwortlich für das exponentielle Auseinanderlaufen oder 'Beisammenbleiben' der Bahnen. ◇

BEMERKUNG: Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, U)$ ein Konfigurationsraum wie oben. Diejenigen Zustandsänderungen konstanter Energie h (nicht notwendig Bahnen im obigen Sinne), welche zwischen Zuständen lokal kürzeste Zeit benötigen, sind Geodätische der *brachystochronischen Metrik* $\langle \cdot, \cdot \rangle'' = (h-U)^{-1} \langle \cdot, \cdot \rangle$.

6.2 Relativitätstheorie

DEFINITION: 4-DIM. PSEUDO EUKLIDISCHER RAUM Dieser ist der \mathbb{R}^4 mit Koordinaten (x^0, \dots, x^3) und dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle_{pe} = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$. ▷

Wir interpretieren die Punkte des \mathbb{R}^4 als Ereignisse mit einer Zeit- und drei Ortskoordinaten. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ ist *flach* or *raumartig*, wenn $\langle v, v \rangle_{pe} < 0$, er ist *isotrop* oder *lichtartig*, wenn $\langle v, v \rangle_{pe} = 0$, und *steil* oder *zeitartig*, wenn $\langle v, v \rangle_{pe} > 0$.

DEFINITION: LEBENSLINIE, EIGENZEIT Eine Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Lebenslinie*, wenn \dot{c} zeitartig ist und $\dot{c}^0 > 0$. Die Bogenlänge $L_a^b(c)$ heißt die *Eigenzeit* längs der Lebenslinie, die zwischen den Ereignissen $c(a)$ und $c(b)$ verbraucht wird. ▷

BEMERKUNG: Diese Bezeichnungen kommen von der Interpretation des pseudo-euklidischen \mathbb{R}^4 als Modell der speziellen Relativitätstheorie.

Im pseudo-euklidischen \mathbb{R}^4 operiert die Gruppe G der pseudo-euklidischen Kongruenztransformationen $g : x \mapsto A \cdot x + b$ mit $A \in O_{1,3}$, d.h. $A^T \cdot \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \cdot A = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Wir schränken wir uns im speziellen auf solche $A \in O_{1,3}$ ein, die 'in die Zukunft' weisende Vektoren ($v \in \mathbb{R}^4$ mit $v^0 > 0$) wieder auf solche abbilden.

SATZ 6.5 (A.D. Alexandrov) Sei $d_{pe}(p, q) = \langle p - q, p - q \rangle_{pe}$. Jede Bijektion $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $d_{pe}(p, q) = 0 \iff d_{pe}(g(p), g(q)) = 0$ ist eine pseudo-euklidische Kongruenztransformation.

SATZ 6.6 (ZWILLINGSPARADOXON) Die 'längsten' (im Sinne der Eigenzeit) Lebenslinien, die zwei Punkte $p, q \in \mathbb{R}^4$ verbinden, sind die monoton parametrisierten Geraden.

BEWEIS: $p - q$ ist zeitartig. Sei $d_{pe}(p, q) = T$. Dann existiert eine pseudo-euklidische Kongruenztransformation mit $p = (0, 0, 0, 0)$ und $q = (0, 0, 0, T)$. Sei o.B.d.A. $c(0) = p$, $c(1) = q$. Für jede Lebenslinie ist $\dot{c}^0(1) > 0$. Dann ist

$$L_0^1(c) = \int_0^1 \sqrt{(\dot{c}^0)^2 - (\dot{c}^1)^2 - \dots} \leq \int_0^1 \sqrt{(\dot{c}^0)^2} = \int_0^1 (\dot{c}^0)^2 = c^0 \Big|_0^1 = T$$

mit Gleichheit genau für $\dot{c}^1 = \dot{c}^2 = \dot{c}^3 = 0$. \square

DEFINITION: PSEUDO-RIEMANNSCHE 4-DIM. MF Sei $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem differenzierbaren $(2, 0)$ -Tensorfeld $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \mathfrak{X}_2 M$, sodaß $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ eine symmetrische Bilinearform in $T_p M$ der Signatur $(+, -, -, -)$ ist. Dann ist $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein pseudo-Riemannscher Raum der Dimension 4. \triangleright

Wir verwenden die in der Riemannschen Geometrie von der Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ abgeleiteten Begriffe wie kovariante Ableitung, geodätische Linie, etc., ohne darauf Rücksicht zu nehmen, daß sie eventuell nicht dieselben Eigenschaften haben wie im Riemannschen Fall. Ein Beispiel für eine solche Diskrepanz ist der Unterschied zwischen Satz 1.3 und Satz 6.6.

Analog zum pseudo-euklidischen \mathbb{R}^4 gibt es die Unterscheidung zwischen raumartigen, lichtartigen, und zeitartigen Vektoren $v \in T_p M$ durch $\langle v, v \rangle < 0$, $\langle v, v \rangle = 0$, und $\langle v, v \rangle > 0$. Wir verwenden $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ als Modell für die Raumzeit der allgemeinen Relativitätstheorie.

DEFINITION: LEBENSLINIE, EIGENZEIT Eine Kurve $c: I \rightarrow M$ heißt Lebenslinie, wenn $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle > 0$. Die Bogenlänge $L_a^b(c)$ heißt Eigenzeit längs der Lebenslinie zwischen $c(a)$ und $c(b)$. \triangleright

DEFINITION: FREIER MASSENPUNKT, PHOTON Eine Lebenslinie gehört zu einem freien Massenpunkt bzw. frei fallenden Teilchen, wenn sie eine geodätische Linie ist, d.h. $\frac{D}{dt} \dot{c} = 0$. Eine lichtartige Geodätische (d.h. $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 0$) ist die Lebenslinie eines Photons. \triangleright

Um als Modell für eine Raum-Zeit im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie zu dienen, muß die pseudoriemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in M bestimmten Bedingungen genügen (Sie muß die 'Feldgleichungen' erfüllen).

Als Motivation für die 'Feldgleichungen im Vakuum' betrachten wir zunächst die klassische Newtonsche Mechanik und danach ein relativistisches Analogon:

BEISPIEL: GEZEITEN, NEWTONSCH Wir betrachten Punkte $x(s)$, die sich im \mathbb{R}^3 mit Koordinaten u^1, u^2, u^3 in einem Kraftfeld mit Potential φ bewegen — zum Zeitpunkt t befinden sie sich bei $x(s, t)$. Wir bezeichnen Ableitungen nach Variablen t, s, u^1, \dots mit $x_{,t}, x_{,s}, \varphi_{,1}$, u.s.w. Die Bewegungsgleichung ist gegeben durch

$$x_{,tt} = -\nabla\varphi(x(s, t)).$$

Wir beobachten das 'Auseinanderdriften der Bahnkurven':

$$\Delta x(t) = x(s, t) - x(0, t) \approx s \cdot x_{,s}$$

$$x_{,ttt} = -\frac{\partial}{\partial s} \begin{bmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ \varphi_{,3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \varphi_{,11} & \dots & \varphi_{,13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{,31} & \dots & \varphi_{,33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{,s}^1 \\ x_{,s}^2 \\ x_{,s}^3 \end{bmatrix}.$$

D.h. längs der Bahnkurve $x(0, t)$ erfüllt die 'infinitesimale Differenz zur Nachbar-Bahnkurve $x(0 + ds, t)$ ' die Gleichung

$$\ddot{x}_{,s} = L(t) \cdot x_{,s},$$

wobei die Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $L(t)$ durch $(\varphi_{,ij}(x(0, t)))$ gegeben ist (siehe die obige Gleichung).

Setzt man beispielsweise das Potential als Gravitonspotential in der Form $\varphi(x) = -1/||x||$ an, so ergibt sich an der Stelle $(r, 0, 0)$ die Matrix

$$L(r, 0, 0) = \frac{1}{|r|^3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Daß die Spur der Matrix verschwindet, ist kein Zufall, sondern ergibt sich aus $\text{tr}(L) = -\text{div grad } \varphi = 0$. Als Motivation für dieses Beispiel können die Wassermassen der Erdoberfläche im Gravitationsfeld des Mondes dienen. \diamond

BEISPIEL: GEZEITEN, RELATIVISTISCH Wir betrachten die Lebenslinien $x(s, t)$ von frei fallenden Teilchen $x(s)$. $c_s(t) = x(s, t)$ sind geodätische Linien. Wir wählen eine Basis E_0, \dots, E_3 in $T_{x(0,0)}M$ mit $\dot{c}_0 = E_0$.

Wir erzeugen Vektorfelder $E_0(0), \dots, E_3(t)$ längs $c_0(t)$ durch geodätische Parallelverschiebung, und verwenden die lokale Parametrisierung

$$g(u^0, \dots, u^3) = \exp_{c_0(u^0)}(u^1 E_1(u^0) + u^2 E_2(u^0) + u^3 E_3(u^0)).$$

Eine solche Karte für M heißt Fermi-Koordinatensystem bezüglich des frei fallenden Beobachters $x(0, t) = c_0(t)$, wenn zusätzlich $(g_{jk}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ in $c(0)$ und damit längs c .

Das 'Auseinanderdriften der Lebenslinien', d.h. die geodätische Abweichung $\frac{\partial x}{\partial s}(0, t) = J(t)$, ist ein Jacobifeld und erfüllt nach Lemma 5.7 die Differentialgleichung

$$J'' = -R(\dot{c}_0, J)\dot{c}_0.$$

Da E_0, \dots, E_3 Parallelfelder sind, sind die Koordinaten von J'' gleich $(x_{,stt}^0, \dots, x_{,stt}^3)$. Wir bestimmen die Koordinatenmatrix der linearen Abbildung $-R(\dot{c}_0, \cdot)\dot{c}_0$ bezüglich der Basis E_0, \dots, E_3 in einem Punkt der Geodätischen $x(0, t)$:

$$-R(\dot{c}_0, E_k)\dot{c}_0 = -R(E_0, E_k)E_0 = -R_{0k0}^l E_l \implies$$

$$J'' = \begin{bmatrix} x_{,stt}^0 \\ \vdots \\ x_{,stt}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{000}^0 & \dots & R_{000}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{030}^0 & \dots & R_{030}^3 \end{bmatrix} \cdot J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{010}^1 & \dots & R_{010}^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & R_{030}^1 & \dots & R_{030}^3 \end{bmatrix} \cdot J.$$

D.h. die geodätische Abweichung wird, genauso wie im Newtonschen Fall, durch eine symmetrische (3×3) -Matrix beschrieben. Es liegt daher nahe, vom Krümmungstensor zu fordern, daß die Spur dieser linearen Abbildung verschwindet:

$$\underbrace{R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3}_{=0} = 0, \text{ bzw. koordinatenfrei } \text{tr}(R(E_0, \cdot)E_0) = 0.$$

Nachdem die Auswahl der Lebenslinie (und des Vektors E_0) beliebig war, ist eine naheliegende Forderung an M , daß

$$\operatorname{tr}(R(v, \cdot)v) = -\operatorname{Ric}(v, v) = 0 \text{ für alle } v.$$

Wegen $\operatorname{Ric}(v, w) = \frac{1}{2}(\operatorname{Ric}(v+w, v+w) - \operatorname{Ric}(v, v) - \operatorname{Ric}(w, w))$ gilt dann auch $\operatorname{Ric}(v, w) = 0$ für alle v, w . \diamond

DEFINITION: FELDGLEICHUNGEN IM VAKUUM Ein vierdimensionaler pseudo-Riemannscher Raum $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ dient als mathematisches Modell für die Bewegung von Teilchen im Vakuum, wenn der Ricci-Tensor verschwindet. \triangleright

BEISPIEL: SCHWARZSCHILD-METRIK Sei $M = \{(u^0, \dots, u^3) \in \mathbb{R}^4 \mid (u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2 > R^2\}$. Sei $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$g(t, r, \theta, \varphi) = (t, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi)$$

eine lokale Parametrisierung von M . Die pseudo-Riemannsche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in M habe bezüglich dieser Karte die Koeffizienten

$$g_{tt} = \frac{r-R}{r}, \quad g_{rr} = -\frac{r}{r-R}, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2, \quad g_{\theta\theta} = -r^2 \sin^2 \varphi.$$

Alle gemischten Koeffizienten sind gleich 0. Man überzeugt sich prinzipiell leicht, daß der Ricci-Tensor verschwindet. Es handelt sich um ein Modell des Gravitationsfeldes eines sphärisch-symmetrischen Körpers. \diamond