Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Dr. Matthias Voigt, Dr. Heiko Kröner

Sommersemester 2019

Optimierung – 9. Übungsblatt.

Bitte bearbeiten Sie die Übungsaufgaben in festen Zweiergruppen.
Abgabetermin: *Donnerstag, 27.06.2019 vor der Übung.*

Aufgabe 1 (3 Punkte): Zeigen Sie: Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener konvexer Kegel und $K \neq \emptyset$, dann gilt $(K^*)^* = K$.

Aufgabe 2 (7 Punkte): Betrachten Sie die Optimierungsaufgabe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{bei } v \leq x \leq w,$$

wobei v und w mit $v < w$ die Vektoren der unteren und oberen Schranken sind.

a) Überführen Sie die Aufgabe in die allgemeine Form

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{bei } Gx \leq r.$$

b) Formulieren Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster Ordnung. Lösen Sie das Optimalitätssystem, indem Sie explizite Formeln für die Lagrangemultiplikatoren in Abhängigkeit von $\partial f / \partial x_i$ herleiten.

c) Leiten Sie die hinreichende Optimalitätsbedinungen zweiter Ordnung aus der Variationsungleichung

$$\left\langle \nabla f\left(\widetilde{x}\right), x - \widetilde{x} \right\rangle \geq 0 \quad \forall\, x \text{ mit } v \leq x \leq w$$

her. Finden Sie Bedingungen in Abhängigkeit der Vorzeichen von $\partial f / \partial x_i$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Betrachten Sie die restringierte Optimierungsaufgabe

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^2} (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 6)^2, \\ -x_1 - 2x_2 + 8 \geq 0, \\ -3x_1 - x_2 + 15 \geq 0, \\ x_1 + x_2 - 1 \geq 0, \\ x_1,\, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Formulieren Sie das Optimalitätssystem und berechnen Sie daraus die Lösung des Problems. Sie können zunächst anhand einer Skizze ermitteln, welche Restriktionen in der optimalen Lösung $\widetilde{x}$ aktiv sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte): Sei $y \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Berechnen Sie die Projektion von y auf die Menge

$$C = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1 + x_2 = 1,\, x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0 \right\}.$$