Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Dr. Matthias Voigt, Dr. Heiko Kröner

Sommersemester 2019

Optimierung – 3. Übungsblatt.

Bitte bearbeiten Sie die Übungsaufgaben in festen Zweiergruppen.
Abgabetermin: *Donnerstag, 02.05.2019 vor der Übung.*

Aufgabe 1 (3 Punkte): Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$$

gegeben. Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f. Zeigen Sie, daß die Hesse-Matrix positiv semidefinit ist. Zeigen Sie weiter, daß die Hesse-Matrix genau dann positiv definit ist, wenn A injektiv ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, offene und konvexe Menge. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Falls f differenzierbar in $\mathcal{F}$ ist, so ist gleichmäßige Konvexität äquivalent zur Existenz eines $\alpha > 0$, sodaß

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x) + \alpha \|x - y\|^2 \quad \forall\, x,\, y \in \mathcal{F}$$

gilt.

b) Falls f zweimal stetig differenzierbar ist, so ist gleichmäßige Konvexität äquivalent zur Existenz einer von $x \in \mathcal{F}$ unabhängigen Konstante $\beta > 0$, sodaß

$$h^{\mathsf{T}} f''(x) h \geq \beta \|h\|^2 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Wählt man Suchrichtungen, die fast senkrecht zum Gradienten liegen, so kann es passieren, daß das Abstiegsverfahren nicht gegen einen stationären Punkt konvergiert. Um dies zu sehen betrachte man die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right).$$

Als Suchrichtung wählen wir die Folge

$$d^k := g^k - 2^{-k-2} \nabla f\left(x^k\right).$$

Dabei sei $g^k \perp \nabla f\left(x^k\right)$ so gewählt, daß $\left\|d^k\right\| = \left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|$. Zeigen Sie, daß das Abstiegsverfahren mit dieser Abstiegsrichtung und zulässiger Schrittweitenwahl für keinen Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegen den einzigen stationären Punkt $x^* = 0$ von f konvergiert und daß x^* auch kein Häufungspunkt der Folge $\left\{x^k\right\}$ ist.

Aufgabe 4 (8 Punkte): Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine steige Funktion, die zweimal stetig differenzierbar in einer nichtleeren, offenen und konvexen Menge D ist. Für $x^0 \in \mathbb{R}^n$ gelte $N\left(f, f\left(x^0\right)\right) \subset D$. Zudem existiere ein $\alpha_1 > 0$ mit

$$h^{\mathsf{T}} f''(x) h \geq \alpha_1 \|h\|^2 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, x \in D,$$

d. h. es gilt gleichmäßige positive Definitheit von f'' auf D.

a) Zeigen Sie, daß dann die Niveaumenge $N\bigl(f, f\bigl(x^0\bigr)\bigr)$ konvex und kompakt ist.
Hinweis: Zeigen Sie, daß für alle $x \in N\bigl(f, f\bigl(x^0\bigr)\bigr)$ *die Abschätzung*

$$\bigl\|x - x^0\bigr\| \leq \frac{2}{\alpha_1}\bigl\|\nabla f\bigl(x^0\bigr)\bigr\|$$

gilt.

b) Beweisen Sie zudem, daß für alle $x \in N\bigl(f, f\bigl(x^0\bigr)\bigr)$ und alle $h \in \mathbb{R}^n$ gilt: Es existieren $\alpha_2 > 0$ und $\beta_1 > 0$, sodaß

- $\|f''(x)\| \leq \alpha_2$;
- $\bigl\|f''(x)^{-1}\bigr\| \leq \beta_2 := 1/\alpha_1$;
- $\beta_1\|h\|^2 \leq h^\mathsf{T} f''(x)^{-1} h \leq \beta_2\|h\|^2$.

c) Folgern Sie nun aus den obigen Aussagen, daß die Newton-Richtung $d := -f''(x)^{-1}\nabla f(x)$ für $x \in N\bigl(f, f\bigl(x^0\bigr)\bigr)$ streng gradientenbezogen ist.