Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Dr. Matthias Voigt, Dr. Heiko Kröner

Sommersemester 2019

Optimierung – 11. Übungsblatt.

Bitte bearbeiten Sie die Übungsaufgaben in festen Zweiergruppen.
Abgabetermin: *Donnerstag, 11.07.2019 vor der Übung.*

Aufgabe 1 (6 Punkte): Betrachten Sie das *Optimalsteuerungsproblem*

$$\begin{aligned} &\min f(z,u) := \frac{1}{2} z_N^{\mathsf{T}} Q z_N + \sum_{i=0}^{N-1} f_i(z_i, u_i), \\ &\text{bei } z_{i+1} = A_i z_i + B_i u_i + c_i, \quad i = 0, \ldots, N-1, \end{aligned}$$

wobei $z_0 \in \mathbb{R}^n$ fest vorgegeben, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ist, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und c_i, $z_i \in \mathbb{R}^n$, $u_i \in \mathbb{R}^m$ für $i = 0, \ldots, N-1$ gilt und $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gegebene differenzierbare Funktionen sind.

a) Formulieren Sie die Lagrangefunktion dieses Problems und leiten Sie daraus die notwendigen Optimalitätsbedingungen her.

b) Lösen Sie (mit `MATLAB`) das *linear-quadratische Optimalsteuerungsproblem*

$$\begin{aligned} &\min f(z,u) := \frac{1}{2} \|z_{10}\|^2 + \sum_{i=0}^{9} \|z_i\|^2 + \|u_i\|^2, \\ &\text{bei } z_{i+1} = -z_i + u_i, \quad i = 0, \ldots, 9. \end{aligned}$$

Sind alle stationären Punkte lokale Minima?

Aufgabe 2 (5 Punkte): Es seien die Funktionen $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$c(y) := \begin{cases} (y+1)^2, & \text{falls } y < -1, \\ 0, & \text{falls } -1 \le y \le 1, \\ (y-1)^2, & \text{falls } y > 1, \end{cases}$$

sowie g_1, $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g_1(x) := c(x_1) - x_2$ und $g_2(x) := c(x_1) + x_2$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß die Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid g_1(x) \le 0,\, g_2(x) \le 0 \right\}$$

konvex ist.

b) Zeigen Sie, daß $x = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ regulär ist, aber die Slater-Bedingung nicht gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Es sei

$$\mathcal{F} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2 + x_3 \ge 0,\, x_1^2 - x_2 + x_3 \ge 0,\, x_3 \ge 0 \right\}$$

gegeben. Überprüfen Sie, welche der Bedingungen Abadie-CQ ("Tangentialkegel = Linearisierungskegel"), MFCQ und LICQ im Punkt $x = 0 \in \mathbb{R}^3$ erfüllt sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Unter einer Optimierungsaufgabe mit *Gleichgewichtsrestriktionen* versteht man ein restringiertes Optimierungsproblem der Gestalt

$$\begin{aligned}
&\min f(x)\\
&\text{bei } g(x) \le 0,\ h(x) = 0,\\
&\qquad G(x) \ge 0,\ H(x) \ge 0,\ G(x)^{\mathsf{T}} H(x) = 0
\end{aligned}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und G, $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$. Zeigen Sie, daß die MFCQ in keinem zulässigen Punkt gilt.