Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Dr. Matthias Voigt, Dr. Heiko Kröner

Sommersemester 2019

Optimierung – 1. Übungsblatt.

Bitte bearbeiten Sie die Übungsaufgaben in festen Zweiergruppen.
Abgabetermin: *Donnerstag, 18.04.2019 vor der Übung. Bitte senden Sie die Lösung der Programmieraufgabe bis zum 17.04.2019, 18:00 Uhr an* `heiko.kroener@uni-hamburg.de`*. Alle zur Ausführung nötigen Dateien sollten in einem Archiv mit dem Namen* `opt_blattnr_aufgabennr_name1_name2.zip` *enthalten sein.*

Aufgabe 1 (8 Punkte): Sei $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und sei $b \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor. Weiterhin sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}Hx + b^{\mathsf{T}}x$$

gegeben. Zeigen Sie:

a) Die Matrix H ist genau dann positiv definit, falls eine Zahl $\alpha > 0$ existiert, sodaß

$$x^{\mathsf{T}}Hx \geq \alpha \|x\|_2^2$$

gilt. Bestimmen Sie in diesem Fall das größtmögliche α.

b) Das Minimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

ist genau dann strikt konvex, wenn H positiv definit ist.

c) Falls H positiv semidefinit ist und $b \notin \operatorname{im} H$ gilt, so ist f nach unten unbeschränkt.

d) Es gilt $\nabla f(x) = Hx + b$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es seien Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $G \in \mathbb{R}^{p\times n}$, sowie Vektoren $b \in \mathbb{R}^m$ und $r \in \mathbb{R}^p$ gegeben. Weiter sei

$$\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\, Gx \leq r\}.$$

Zeigen Sie, daß $\mathcal{F}$ abgeschlossen und konvex ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte): Zeigen Sie, daß für $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\} \subset \mathbb{R}$ die Matrix

$$H = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \xi_i^2 & \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \sum_{i=1}^m \xi_i & m \end{bmatrix}$$

positiv semidefinit ist. Zeigen Sie weiter, daß H genau dann positiv definit ist, falls zwei der ξ_i verschieden sind.

Aufgabe 4 (3 Punkte): Eine beliebte Funktion zum Testen numerischer Optimierungsalgorithmen ist die *Rosenbrock-Funktion*

$$f(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$

Schreiben Sie ein `MATLAB`-Programm zur graphischen Visualisierung dieser Funktion. Die `MATLAB`-Funktion `surf` könnte hier hilfreich sein.