

Università degli Studi di Napoli
Federico II

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2003-2004

**Spazi Noncommutativi e
Limiti di Algebre di Matrici**

Relatore
Prof. F. Lizzi

Correlatore
Prof. G. Maiella

Candidato
Alessandro Valentino

Indice

1	Introduzione	1
2	Strumenti Matematici	9
2.1	C^* -algebre: Prime Definizioni	9
2.2	Ideali, Spettri e Rappresentazioni	13
2.3	Spazi Topologici e C^* -algebre	17
2.3.1	Il Teorema di Gelfand-Naimark	17
2.3.2	Verso gli Spazi Noncommutativi	21
2.4	Stati e Costruzione GNS.	23
3	Spazi Noncommutativi	29
3.1	Lo Spazio delle Fasi della Meccanica Classica.	29
3.2	Lo Spazio delle Fasi della Meccanica Quantistica.	31
3.3	Mappa di Weyl e di Wigner.	32
3.4	Quantizzazione di Moyal e Deformazioni.	34
3.5	Il Piano Noncommutativo.	36
3.6	Campi Magnetici e Geometria Noncommutativa.	43
3.7	Il Toro Noncommutativo.	48
4	C^*-algebre Approssimativamente Finite	53
4.1	Definizioni e Proprietà Elementari.	54
4.2	Algebre AF e Diagrammi di Bratteli.	55
4.3	Struttura Algebrica di un'Algebra AF.	59
4.4	Topologia e Algebre AF.	61
4.4.1	La Topologia di Jacobson.	61
4.4.2	Dagli Spazi Topologici alle Algebre AF.	62
4.5	Reticoli Noncommutativi.	65
4.5.1	Approssimazioni Topologiche	66
5	Sfere Noncommutative e Sistemi Dinamici	73
5.1	Algebre Invarianti e Toro Noncommutativo.	73

INDICE

5.2	L'Algebra Polinomiale.	76
5.3	La C^* -algebra.	83
5.4	θ Razionale vs. θ Irrazionale.	85
5.5	Sistemi Dinamici e Derivazioni.	88
5.5.1	C^* -Dynamical Systems: Motivazioni.	88
5.5.2	Crossed Products.	91
5.5.3	Derivazioni di una C^* -algebra.	94
5.6	Derivazioni del Toro Noncommutativo.	99
5.7	Derivazioni di \mathcal{B}_θ	101
5.8	Possibili sviluppi ulteriori	104
A	Elementi di Topologia	105
B	Il Toro Noncommutativo nel Caso Razionale	109
C	Una Dimostrazione	111
D	Rappresentazioni Unidimensionali di \mathcal{P}^σ	113

*A mio nipote, Mattia.
Ad Antonella.*

Capitolo 1

Introduzione

La Geometria Noncommutativa nasce “ufficialmente” nel 1994, con la pubblicazione del libro “Noncommutative Geometry” di Alain Connes, diventato ormai un classico per gli addetti ai lavori. Più che un vero manuale, il libro di Connes si configura come un’esposizione molto originale di una nuova disciplina matematica che utilizza ed ingloba tecniche ben note in altre aree, dalla geometria differenziale alla topologia algebrica, e le estende a casi non trattabili classicamente. Nonostante molti risultati siano stati ottenuti da Connes stesso, la Geometria Noncommutativa affonda le sue radici non solo nella matematica, ma anche nella fisica della prima metà del secolo scorso, quando le algebre di operatori di Von Neumann e Segal e la meccanica quantistica di Schrödinger, Heisenberg e Dirac facevano la loro apparizione. A differenza delle relatività generale, altra grande protagonista di quel periodo scientifico, la meccanica quantistica metteva in crisi la descrizione geometrica della natura, con i punti e le linee che non erano più adatti a descrivere una fisica che non permetteva la misura simultanea di posizione e momento di una particella, a causa del principio di indeterminazione di Heisenberg. Le “coordinate” x e p dello spazio delle fasi, che ora era impossibile modellizzare come una varietà differenziabile, venivano sostituite da variabili noncommutanti, q -numeri, nella notazione di Dirac, che soddisfacevano le regole di commutazione $[x, p] = i\hbar$. Si riconoscerà, in seguito, che tali oggetti sono operatori autoaggiunti definiti su di uno spazio di Hilbert, e che ogni esperimento possibile su di un sistema fisico alle scale atomiche va descritto in tali termini. Ebbene, figlia di un come sempre fruttuoso rapporto tra matematica e fisica che ancora continua, la Geometria Noncommutativa cerca di coniugare tali risultati allo studio di oggetti, in particolare spazi topologici, che sfuggono all’analisi della matematica classica. L’idea cardine consiste nel ritenere che, al pari di un sistema fisico, anche uno spazio topologico può essere analizzato mediante “misure”: detto in questi termini può sembrare molto strano, e

perció preferiamo chiarire un attimo questo punto. Dato uno spazio \mathcal{S} , la sua topologia viene assegnata specificando una famiglia di insiemi che vengono chiamati aperti, e che caratterizzano la “vicinanza” tra i punti. In generale, però, a meno che \mathcal{S} non sia costituito da un numero finito di punti, è estremamente complicato, se non impossibile, studiarne le caratteristiche topologiche direttamente dagli insiemi aperti: si preferisce, cosí, usare delle “sonde” che rivelino la particolare struttura topologica di \mathcal{S} . Tali sonde sono matematicamente descritte dalle funzioni continue su \mathcal{S} a valori in \mathbb{C} , e l’insieme di tutte le funzioni continue $C(\mathcal{S})$ soddisfa interessanti proprietà. Infatti, $C(\mathcal{S})$ è una C^* -algebra, ovvero uno spazio vettoriale di Banach munito di un prodotto associativo tra gli elementi e di una coniugazione tale che

$$\|f^*f\| = \|f\|^2$$

per ogni funzione continua f . Essendo il prodotto tra due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definito come $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $C(\mathcal{S})$ è un’algebra commutativa. Grazie ad un teorema degli anni quaranta che riproponiamo nel secondo capitolo, si può mostrare che ogni spazio topologico sufficientemente regolare è interamente descritto, sia dal punto di vista insiemistico che topologico, anche dalla sua algebra delle funzioni continue. L’aspetto interessante, però, è che vale il contrario, e cioè che *ogni* C^* -algebra commutativa è un’algebra di funzioni continue su di un qualche spazio topologico \mathcal{S} . Le caratteristiche dello spazio \mathcal{S} sono cosí codificate algebricamente, il ché permette di parlare della topologia senza necessariamente dover assegnare una famiglia di insiemi aperti, e quindi senza fare alcun riferimento alla struttura puntuale dello spazio \mathcal{S} . Tale approccio matematico ha un corrispettivo fisico nella teoria dei campi: le funzioni continue su \mathcal{S} sono infatti campi scalari. A questo punto il passo è breve: estendendo l’equivalenza, chiameremo *spazio noncommutativo* una qualsiasi C^* -algebra \mathcal{A} il cui prodotto tra gli elementi non è commutativo. L’algebra \mathcal{A} sarà il “duale” di un oggetto che in generale non esiste “concretamente”, nel senso che la sua struttura puntuale non sarà ben definita: fisicamente parlando, i suoi punti non saranno più “localizzati”, alla stregua dei sistemi fisici descritti dalla meccanica quantistica. È proprio questo uno degli aspetti che fa pensare alla Geometria Noncommutativa come alla “matematica ai tempi della meccanica quantistica”, e che suscita l’interesse di molti fisici. A tale proposito, riteniamo utile menzionare nel seguito un breve percorso di argomenti e applicazioni, anche se alcuni di questi sono poco o per nulla sviluppati nel nostro lavoro di tesi, che tuttavia hanno avuto ed hanno ancora un’importanza nella “storia” della Geometria Noncommutativa.

Assegnata l’algebra \mathcal{A} come ingrediente fondamentale, è possibile estendere agli spazi noncommutativi molte delle strutture note in geometria classica.

Così, la teoria dei fibrati vettoriali e delle connessioni, indispensabile per lo studio delle teorie di gauge, sarà generalizzata mediante l'utilizzo di moduli proiettivi di tipo finito su \mathcal{A} , ovvero di algebre di matrici su \mathcal{A} , mentre il calcolo differenziale sarà basato sulla nozione di “triplice spettrale” $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$, dove \mathcal{A} è una *-algebra rappresentata sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} , e D è un operatore autoaggiunto su \mathcal{H} con opportune proprietà che contiene tutte le informazioni “geometriche”, e che generalizza il classico operatore di Dirac $i\gamma^\mu \partial_\mu$. Una prima applicazione di tali tecniche fu al Modello Standard delle particelle elementari: in [CL90], Connes e Lott proposero un'azione di Yang-Mills per uno spazio-tempo (euclideo) $\mathcal{M} \times Y$ dato dal prodotto di una varietà Riemanniana dotata di spin \mathcal{M} per un spazio interno “discreto” Y che consiste di due punti. Il risultato è una lagrangiana che riproduce il Modello Standard col settore di Higgs con autointerazione tipo φ^4 che rompe la simmetria e termine di Yukawa per i fermioni che viola la parità. L'aspetto interessante è che anche il campo di Higgs ha una interpretazione geometrica come campo di gauge nella direzione interna, e che il meccanismo di rottura della simmetria è contenuto nell'azione a livello geometrico.

Un'altro filone di pensiero tenta di descrivere, mediante la Geometria Non-commutativa, la gravità di Einstein alla scala di Planck. In [DFR95], lavoro che è diventato un classico del settore, gli autori propongono l'impossibilità di localizzare un evento nello spazio-tempo con arbitraria precisione, previo un collasso gravitazionale. Come conseguenza delle relazioni di Heisenberg, infatti, la misura di una coordinata spazio-temporale con accuratezza a causa un'incertezza nel momento dell'ordine a^{-1} , e quindi una concentrazione di energia in una regione localizzata. Per le equazioni di Einstein, tale energia genera un campo gravitazionale, che, alla scala di Planck, può essere talmente intenso da impedire alla luce o ad altri segnali di lasciare la regione in questione, rendendo così impossibile associare un significato operativo al concetto di localizzazione nello spazio-tempo di un evento. A tale proposito vi è la proposta di sostituire lo spazio-tempo di Minkowski con una varietà noncommutativa, e cioè un'algebra non commutativa, generata da elementi le cui regole di commutazione implicano l'indeterminazione sulle coordinate alla scala di Planck, e sulla quale agisca ancora il gruppo di Poincarè. È possibile, inoltre, su tale “spazio-tempo quantistico”, costruire una teoria quantistica di campo, definendo campi liberi e matrice S : si mostra, inoltre, che uno dei vantaggi è dato dall'assenza di alcune divergenze ultraviolette causata dalla struttura stessa dello spazio-tempo, che gioca così lo stesso ruolo di un cut-off, senza però distruggere le simmetrie presenti.

Ma la noncommutatività delle coordinate di posizione è un effetto che si può osservare anche nei sistemi fisici in presenza di campi magnetici molto intensi. Molto interessante è il caso di una particella carica vincolata a muoversi

su di un piano in presenza di un campo magnetico B : come mostreremo, i momenti “fisici” gauge invarianti quantizzati non commutano più tra di loro, rendendo impossibile la costruzione di uno “spazio degli impulsi”. Nel caso in cui, poi, il campo sia molto intenso, si manifesta la perdita di commutatività tra le coordinate di posizione della particella sul piano, con un parametro di noncommutatività proporzionale ad \hbar e all’inverso dell’intensità B del campo magnetico. Nello stesso contesto è da inquadrarsi lo studio del toro noncommutativo, che appare spesso nell’analisi di sistemi fisici ai quali sono imposte condizioni periodiche dello spazio delle fasi. Tra tali sistemi uno dei laboratori più ricchi è certamente dato dall’effetto Hall quantistico: la presenza di un potenziale periodico fa sí che il gruppo delle traslazioni vada sostituito con il gruppo delle “traslazioni magnetiche”, che però non è più commutativo. Inoltre, si può mostrare [Con94] che le zone di Brillouin, quando analizzate mediante le funzioni continue definite su di esse, costituiscono un toro noncommutativo T_θ^2 , in cui il parametro θ è proporzionale a B . Ciò da una spiegazione dell’integralità della conduttività Hall σ_H , che viene misurata sperimentalmente con accuratezza eccezionale.

L’interesse quasi esplosivo della Geometria Noncommutativa nella teoria delle stringhe inizia dal noto articolo di Seiberg e Witten, in cui si propone che il worldsheet della stringa aperta in presenza di un particolare tipo di campo esterno sia una varietà noncommutativa, in quanto le funzioni definite su di essa vengono moltiplicate con un nuovo prodotto, indicato con \star . Lo studio di un “prodotto star”, il *prodotto di Moyal*, risulta molto interessante, in quanto tale prodotto viene utilizzato per la costruzione del piano e del toro noncommutativo, ed in generale per la quantizzazione di varietà su cui agisce il gruppo di Heisenberg.

Come detto precedentemente, l’ingrediente fondamentale della Geometria Noncommutativa è costituito da C^* -algebre non commutative. Come vedremo in seguito, tali algebre sono *sempre* algebre di operatori su spazi di Hilbert. In generale, essendo infinito-dimensionali, esse sono estremamente complicate da trattare, e le loro proprietà sono spesso difficili da determinare. A tale proposito, il mio lavoro di tesi consiste nello studio di un particolare tipo di C^* -algebre chiamate *algebre approssimativamente finite (AF)*. Tali algebre sono molto interessanti, in quanto ogni elemento può essere approssimato in norma da una successione di matrici finito-dimensionali, nonostante l’algebra di partenza sia infinito-dimensionale. Ciò è molto vantaggioso, dato che molte proprietà dell’algebra limite sono diretta conseguenza della struttura delle sottoalgebre approssimanti. Inoltre esiste la possibilità di costruire un grafico, chiamato *diagramma di Bratteli*, che definisce unicamente, o meglio a meno di isomorfismi, l’algebra a cui è associato.

In particolare, abbiamo studiato in dettaglio una sottoalgebra \mathcal{B}_θ del toro

noncommutativo, che, nel caso in cui il parametro θ è irrazionale, risulta essere AF. Tale algebra è ottenuta quotizzando opportunamente l'algebra del toro: nel caso commutativo, tale quoziente produce una “sfera con quattro punture”. Inoltre, nel lavoro di tesi abbiamo approfondito lo studio dei sistemi dinamici e delle loro simmetrie nella formulazione algebrica della meccanica quantistica. In tale approccio, un sistema fisico è descritto da una C^* -algebra astratta, i cui elementi autoaggiunti rappresentano gli osservabili del sistema in esame. La formulazione standard della meccanica quantistica è riottenuta passando ad una particolare rappresentazione in termini di operatori su di uno spazio di Hilbert. Tale approccio, tuttavia, è particolarmente utile nel caso di sistemi ad infiniti gradi di libertà, a causa della presenza di rappresentazioni non unitariamente equivalenti dell'algebra degli osservabili. In tale contesto, ci siamo concentrati in particolare sulla ricerca di *derivazioni* della C^* -algebra \mathcal{B}_θ , che in Geometria Noncommutativa costituiscono la generalizzazione dei campi vettoriali della geometria differenziale, e che permettono inoltre di descrivere evoluzioni dinamiche in cui gli stati del sistema si evolvano in maniera discontinua, come ad esempio in presenza di transizioni di fase in un sistema statistico.

La tesi è organizzata come segue. Il capitolo 2 costituisce un'introduzione matematica della teoria delle C^* -algebre e delle loro rappresentazioni. Nel capitolo 3 studiamo il piano ed il toro noncommutativo, enfatizzando in particolare l'approccio analitico-funzionale, e presentiamo un'applicazione allo studio di una particella carica in presenza di un campo magnetico costante. Nel capitolo 4 introduciamo le algebre approssimativamente finite, ed i diagrammi di Bratteli, riportando inoltre qualche risultato notevole. Come applicazione alla discretizzazione di teorie di campo viene presentato uno studio dei *reticoli noncommutativi*, che permettono di approssimare particolari tipi di spazi, senza perdere informazioni sulla topologia dello spazio di partenza. Ciò comporta la possibilità di poter trattare oggetti topologici presenti nella teoria, quali solitoni e istantoni, ad ogni stadio di approssimazione, ed in maniera intrinsecamente geometrica. Nel capitolo 5 studiamo in dettaglio l'algebra \mathcal{B}_θ e presentiamo la formulazione algebrica dei sistemi dinamici. Dopo una breve introduzione alle proprietà generali, discutiamo le derivazioni del toro noncommutativo e dell'algebra \mathcal{B}_θ : delineamo, infine, possibili sviluppi ulteriori.

“Mathematicians are like Frenchmen: whatever you say to them they translate into their own language and forthwith it is something entirely different”

J.W.Goethe

Capitolo 2

Strumenti Matematici

Questo capitolo costituisce una breve introduzione ai metodi matematici della Geometria Noncommutativa, che saranno poi utilizzati nei successivi capitoli. La linea guida che svilupperemo consisterà in una riscrittura delle comuni nozioni riguardanti gli spazi topologici e geometrici: ciò ci permetterà di enfatizzarne la natura algebrica, e in tal modo di generalizzarle in maniera opportuna e naturale. Apparirà chiaro, in questa maniera, che la Geometria Noncommutativa si pone come crocevia di differenti branche della Matematica e non solo, e risulterà evidente, in particolare, l'influenza ed il legame con la Meccanica Quantistica. Per un approfondimento e per ulteriori dettagli si rimanda a [Bra81],[Lan97],[GBVF00]. Per gli elementi di analisi funzionale si veda [RS72].

2.1 C^* -algebre: Prime Definizioni

Sia \mathcal{A} uno spazio vettoriale su di un campo \mathbb{K} , che nel nostro caso identificheremo con \mathbb{C} , e si introduca l'applicazione, chiamata *prodotto*:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : (a, b) \rightarrow ab \quad (2.1.1)$$

con le proprietà che

$$c(\alpha a + \beta b) = \alpha(ca) + \beta(cb), \quad (\alpha a + \beta b)c = \alpha(ac) + \beta(bc) \quad (2.1.2)$$

$\forall a, b, c \in \mathcal{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. La coppia (\mathcal{A}, \cdot) viene chiamata *algebra*: nel seguito, per comodità di notazione ci riferiremo ad \mathcal{A} come algebra. In generale il prodotto sarà *non commutativo*, cioè si avrà che:

$$ab \neq ba \quad (2.1.3)$$

2.1. C^* -algebre: Prime Definizioni

A differenza di un gruppo, un'algebra non necessariamente possiede un'unità \mathbb{I} , cioè un elemento che verifica

$$a\mathbb{I} = \mathbb{I}a, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (2.1.4)$$

Un'algebra con unità verrà detta *unitale*. Nei casi di nostro interesse le algebre saranno generalmente *associative*, cioè si avrà che:

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A} \quad (2.1.5)$$

Chiamiamo *inverso*, se esiste, di un elemento a di \mathcal{A} l'elemento a^{-1} tale che $aa^{-1} = a^{-1}a = \mathbb{I}$. Definiamo come $*$ -algebra un'algebra sulla quale è definita un'*involutione*, cioè una mappa antilineare $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : a \rightarrow a^*$ tale che:

$$(\alpha a + \beta b)^* = \bar{\alpha}a + \bar{\beta}b \quad (2.1.6)$$

$$(ab)^* = b^*a^* \quad (2.1.7)$$

$$(a^*)^* = a, \quad \forall a, b \in \mathcal{A}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (2.1.8)$$

dove il sovrasegnato indica la coniugazione in \mathbb{C} ; chiameremo *algebra normata* un'algebra sulla quale è definita un'applicazione $\|\cdot\| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa

$$\|a\| \geq 0, \quad \|a\|=0 \Leftrightarrow a = \underline{0} \quad (2.1.9)$$

$$\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\| \quad (2.1.10)$$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad (2.1.11)$$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \quad (2.1.12)$$

$\forall a, b \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}$; la terza relazione è detta *diseguaglianza triangolare*, mentre l'ultima garantisce che il prodotto è un'applicazione continua. Se lo spazio vettoriale di supporto all'algebra \mathcal{A} è completo nella metrica indotta dalla norma, diremo che \mathcal{A} è un'*algebra di Banach*. Nel caso in cui l'involutione soddisfi la seguente proprietà di compatibilità con la norma

$$\|a^*\| = \|a\|, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (2.1.13)$$

ed \mathcal{A} è uno spazio normato completo, diremo che \mathcal{A} è una $*$ -*algebra di Banach*. Una C^* -algebra è un'algebra di Banach con la norma che verifica¹

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (2.1.14)$$

¹Osserviamo che tale proprietà, unita alla diseguaglianza del prodotto, implica che una C^* -algebra è anche una $*$ -algebra

2.1. C^* -algebre: Prime Definizioni

Desideriamo, a questo punto, descrivere in dettaglio due esempi di C^* -algebra che risulteranno prendere parte in maniera determinante al paradigma concettuale e tecnico della Geometria Noncommutativa: l'algebra delle funzioni continue su di uno spazio di Hausdorff (localmente) compatto e l'algebra degli operatori limitati su di uno spazio di Hilbert.

Esempio 2.1 *Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff, e si consideri l'insieme $C(X)$ delle funzioni $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Tale insieme si può munire di struttura di spazio vettoriale su \mathbb{C} con le seguenti definizioni*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in C(X) \quad (2.1.15)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in C(X) \quad (2.1.16)$$

dove abbiamo usato lo stesso simbolo di somma e prodotto di \mathbb{C} . Possiamo ora definire un prodotto (abeliano) tra funzioni

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall f, g \in C(X) \quad (2.1.17)$$

e una norma

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|, \quad \forall f \in C(X) \quad (2.1.18)$$

Osserviamo che tale norma è ben definita per ogni funzione $f \in C(X)$: infatti, $|f(x)|$ è limitata in X , essendo una funzione continua di X in \mathbb{R} , ed essendo X uno spazio compatto. Utilizzando le proprietà del \sup in \mathbb{R} , si dimostra agevolmente che tale norma è compatibile con il prodotto prima definito; inoltre, i metodi dell'Analisi Funzionale ci dicono che tale norma è completa, e dunque che $C(X)$ è un'algebra di Banach unitale, dove l'unità è la funzione $f(x) = 1, \forall x \in X$. Possiamo introdurre anche un'involuzione *

$$f^*(x) = \overline{f(x)}, \quad \forall f \in C(X) \quad (2.1.19)$$

Anche l'involuzione è compatibile con la norma: inoltre rende $C(X)$ una C^* -algebra. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \|f^* f\| &= \sup_{x \in X} |\overline{f(x)} f(x)| \\ &= \sup_{x \in X} (|f(x)|^2) \\ &= (\sup_{x \in X} |f(x)|)^2 \\ &= \|f\|^2, \quad \forall f \in C(X) \end{aligned}$$

2.1. C^* -algebre: Prime Definizioni

dove la penultima relazione è dovuta alla stretta monotonia della funzione x^2 per $x \geq 0$. Osserviamo che la richiesta che X sia di Hausdorff è necessaria, se vogliamo considerare funzioni continue da X in \mathbb{C} .²

Se X non è uno spazio compatto, ma localmente compatto, i risultati precedenti sono validi, a patto di considerare però le funzioni continue “che vanno a zero all’infinito”, che indicheremo con $C_0(X)$: ricordiamo che una funzione $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ “va a zero all’infinito” se $\forall \epsilon > 0, \exists K \subset X$ compatto tale $\forall x \notin K$ si ha $|f(x)| < \epsilon$. $C_0(X)$ è, però, priva di unità, in quanto le funzioni costanti non vi appartengono. \square

Esempio 2.2 Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert, e si consideri $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l’insieme degli operatori lineari limitati definiti su \mathcal{H} in sè. Utilizzando come somma l’usuale somma puntuale, come prodotto la composizione di applicazioni, e come norma

$$\|B\| = \sup \{ \|B\psi\|, \text{ con } \psi \in \mathcal{H} : \|\psi\| = 1 \}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ diventa un’algebra di Banach (infinito dimensionale) non commutativa unitale.

Se come involuzione utilizziamo la mappa $\dagger: B \rightarrow B^\dagger$, dove B^\dagger è l’aggiunto di B in \mathcal{H} , abbiamo che $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è una C^* -algebra.

Nel caso particolare in cui \mathcal{H} è uno spazio di Hilbert n -dimensionale sappiamo che $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ si può realizzare come l’algebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ delle matrici $n \times n$ ad entrate complesse, e dove B^\dagger è la matrice hermitiana coniugata. La norma precedente si può riscrivere come

$$\|B\| = \text{la radice quadrata del massimo degli autovalori di } B^\dagger B$$

Per provarlo basta notare che $B^\dagger B$ è una matrice autoaggiunta con autovalori positivi, ed utilizzare un suo sistema ortonormale di autovettori, essendo il prodotto scalare invariante per trasformazioni di passaggio ortogonali.

Vogliamo concludere questo esempio con un’osservazione che riteniamo interessante: sull’algebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ è possibile definire una differente norma ponendo $\|B\| = \sup\{|B_{ij}|\}$, dove B_{ij} sono le entrate di B , e tale norma è equivalente alla precedente.³ Si constata agevolmente, però, che tale norma

²Essendo \mathbb{C} di Hausdorff, $\forall x, y \in \mathbb{C}, \exists \mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y$, intorni aperti di x e y rispettivamente tali che $\mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$: presi a e b in X tali che $f(a) = x, f(b) = y$, con f funzione continua, abbiamo che $f^{-1}(\mathcal{O}_x), f^{-1}(\mathcal{O}_y)$ sono intorni aperti disgiunti di a e b , rispettivamente.

³In generale, su di uno spazio vettoriale V finito dimensionale sui complessi tutte le norme possibili sono equivalenti e complete.

2.2. Ideali, Spettri e Rappresentazioni

non è una C^* -norma nonostante le due algebre siano Banach equivalenti: questo è dovuto al fatto che in una C^* -algebra la norma e la struttura algebrica, come vedremo in seguito, sono intimamente legate. \square

Un'algebra di Frechet \mathcal{A} è un'algebra munita di una famiglia di seminorme $\{\|\cdot\|_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ che separano i punti, e cioè è tale che $\|a\|_k = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ implica che $a = 0$. Ricordiamo che una seminorma è un'applicazione sull'algebra \mathcal{A} che verifica le proprietà della norma eccetto la (2.1.9), e che la topologia naturale su \mathcal{A} è la topologia debole, in cui ogni seminorma è continua. Un'esempio di algebra di Frechet è dato dalle funzioni infinitamente differenziabili su di una varietà compatta M .

Esempio 2.3 Si consideri l'algebra $C^\infty(M)$ delle funzioni infinitamente differenziabili su di una varietà compatta M . Una famiglia di seminorme è data da

$$\|f\|_k \equiv \sup_{x \in M} \{|\partial^\alpha f(x)|, |\alpha| \leq k\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.20)$$

Esiste una involuzione $*$, data dalla coniugazione sui complessi, ed inoltre $\|\cdot\|_0$ è l'usuale norma sulle funzioni continue. L'algebra $C(M)$ è il completamento di $C^\infty(M)$, che quindi vi è contenuta densamente: come sarà chiaro in seguito, la struttura differenziale di una varietà è interamente codificata dalla sua algebra delle funzioni "lisce". \square

2.2 Ideali, Spettri e Rappresentazioni

Sia \mathcal{A} una $*$ -algebra normata, e sia I un suo sottospazio lineare. Diremo che I è un'ideale sinistro (risp. destro) non banale se $I \subset \mathcal{A}$, e $\forall a \in \mathcal{A}$ e $\forall b \in I$, si ha che ab (risp. ba) $\in I$; inoltre diremo che I è un ideale chiuso se I è chiuso come sottospazio di \mathcal{A} nella topologia della norma. Nel caso in cui I sia un ideale destro e sinistro contemporaneamente, diremo che I è un ideale bilatero. Osserviamo che un ideale (non banale) chiuso è una sottoalgebra (propria) normata, in quanto è chiuso algebricamente rispetto al prodotto. Un ideale massimale (destro, sinistro, o bilatero) è un ideale che non è incluso in nessun altro ideale (dello stesso tipo).⁴ Se un ideale I è tale che $\forall a \in I$ si ha che $a^* \in I$, si dirà che I è uno $*$ -ideale; è facile mostrare che uno $*$ -ideale è automaticamente bilatero. Se \mathcal{A} è una $*$ -algebra di Banach e I è uno $*$ -ideale

⁴Per la continuità del prodotto rispetto alla norma, un ideale massimale è automaticamente chiuso.

2.2. Ideali, Spettri e Rappresentazioni

chiuso, si ha che \mathcal{A}/I si può munire di struttura di $*$ -algebra di Banach: ometteremo la dimostrazione, nonostante non sia del tutto immediata.

Esempio 2.4 *Si consideri l'algebra $C(X)$ del paragrafo precedente e l'insieme $I_{\tilde{x}}$ definito come:*

$$I_{\tilde{x}} \equiv \{f \in C(X) : f(\tilde{x}) = 0\} \quad (2.2.1)$$

$I_{\tilde{x}}$ è uno $$ -ideale bilatero. Infatti, $\forall g \in C(X)$ e $\forall f \in I_{\tilde{x}}$ si ha $gf(\tilde{x}) = g(\tilde{x})f(\tilde{x}) = 0$, e dunque $gf \in I_{\tilde{x}}$: essendo $C(X)$ un'algebra abeliana $I_{\tilde{x}}$ è un ideale bilatero. Inoltre, $\forall f \in C(X)$, $f^*(\tilde{x}) = \overline{f(\tilde{x})} = 0$, e dunque $f^* \in I_{\tilde{x}}$. Si dimostra, inoltre, abbastanza agevolmente che $I_{\tilde{x}}$ è chiuso nella topologia della norma⁵. \square*

Nel seguito \mathcal{A} indicherà una $*$ -algebra di Banach con unità \mathbb{I} , salvo avviso contrario. Chiameremo *insieme risolvente* di un elemento a di \mathcal{A} il sottoinsieme $\rho(a)$ di \mathbb{C} definito come:

$$\rho(a) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda\mathbb{I}) \text{ è invertibile in } \mathcal{A}\} \quad (2.2.2)$$

L'elemento $R(\lambda) = (a - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ di \mathcal{A} , $\forall \lambda \in \rho(a)$, è detto *risolvente* di a in λ ; l'insieme $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ è chiamato *spettro* di a . Nel caso in cui \mathcal{A} è una C^* -algebra, sussistono due importanti risultati: $\forall a \in \mathcal{A}$, l'insieme $\rho(a)$ è un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , e la mappa $R : \lambda \in \rho(a) \rightarrow R(\lambda) \in \mathcal{A}$ è analitica⁶ nelle parti connesse di $\rho(a)$. Dall'Analisi Complessa, sappiamo che le uniche funzioni analitiche intere, cioè definite sull'intero piano complesso, e limitate in modulo sono costanti: giungiamo alla conclusione, quindi, che $\rho(a)$ è un sottoinsieme proprio di \mathbb{C} , e dunque che *lo spettro di un qualsiasi elemento di \mathcal{A} è non vuoto*; inoltre si può mostrare che $\sigma(a)$ è *compatto*. In tal caso, definiamo il *raggio spettrale* $r(a)$ come

$$r(a) \equiv \sup \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} \quad (2.2.3)$$

⁵Sia infatti $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di $I_{\tilde{x}}$ convergenti a f : per la definizione stessa della norma, vale che $|f(x) - f_n(x)| \leq \|f - f_n\|$, $\forall x \in X$, e dunque $|f(\tilde{x})| \leq \|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Si ha così che $f(\tilde{x}) = 0$, e dunque che $f \in I_{\tilde{x}}$.

⁶Ricordiamo che una funzione $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}$, dove D è un aperto e \mathcal{A} è un'algebra di Banach, si dice *analitica* in $z_0 \in D$ se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

esiste in \mathcal{A}

2.2. Ideali, Spettri e Rappresentazioni

Se a è un elemento *autoaggiunto* di \mathcal{A} , cioè $a^* = a$, si può mostrare che $\|a\| = r(a)$: per le proprietà della C^* -norma si hanno le seguenti eguaglianze

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) \equiv \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a^*a)\} \quad (2.2.4)$$

poichè a^*a è, ovviamente, autoaggiunto. Risulta chiaro, a questo punto, quanto accennato in precedenza: la norma di un elemento di una C^* -algebra è totalmente fissata dalla struttura algebrica, cioè dagli spettri. Si può mostrare, in modo non banale, che lo spettro di un elemento autoaggiunto è tutto contenuto nell'intervallo chiuso $[-\|a\|, \|a\|]$ della retta reale.

Diremo che a è un elemento *positivo* se a è autoaggiunto, e se $\sigma(a) \subset [0, \|a\|]$: lo indicheremo con $a > 0$, se $a \neq 0$.⁷

Dall'esempio della sezione precedente, si capisce che, nel caso in cui \mathcal{A} sia $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, si ritrovano i risultati della teoria dello spettro di un operatore limitato su di uno spazio di Hilbert: inoltre, anche nel caso di una C^* -algebra qualsiasi è possibile costruire un *calcolo funzionale olomorfo* ed un *calcolo funzionale continuo* per gli elementi autoaggiunti. In quest'ottica possiamo definire come *radice quadrata* \sqrt{a} di $a > 0$ l'elemento che ha come spettro $\sigma(\sqrt{a}) = \{\sqrt{\lambda}, \text{ con } \lambda \in \sigma(a)\}$, e quindi come *modulo* $|a| = \sqrt{a^*a}$.

Un elemento a verrà detto *unitario* se $a^*a = aa^* = \mathbb{I}$: il suo spettro è un sottoinsieme del cerchio unitario in \mathbb{C} . Se a verifica $a = a^* = a^2$ si dirà *proiettore*, e si mostra facilmente che il suo spettro è costituito dai punti $\{0, 1\}$ di \mathbb{R} .

Introduciamo, ora, le nozioni inerenti alle rappresentazioni di C^* -algebre.

Siano \mathcal{A} e \mathcal{B} C^* -algebre, e sia $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un mappa \mathbb{C} -lineare, cioè tale che $\pi(\alpha a + b) = \alpha\pi(a) + \pi(b)$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Diremo che π è uno **-omomorfismo* se verifica

$$\begin{aligned} \pi(ab) &= \pi(a)\pi(b) \\ \pi(a^*) &= \pi(a)^*, \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

cioè preserva la moltiplicazione e la coniugazione. Un primo risultato importante, che useremo nel seguito, è che uno *-omomorfismo è automaticamente continuo, e dunque limitato, verificando che

$$\|\pi(a)\|_{\mathcal{B}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (2.2.5)$$

dove $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ indicano le norme in \mathcal{A} , \mathcal{B} rispettivamente. La dimostrazione è relativamente semplice, e si basa sul fatto che un omomorfismo "restringe"

⁷Tutti e soli gli elementi positivi di una C^* -algebra sono della forma b^*b per un qualche b .

2.2. Ideali, Spettri e Rappresentazioni

lo spettro dell'immagine di un elemento, e che π è una mappa continua. Nel caso in cui π è invertibile come mappa algebrica, diremo che π è uno **-isomorfismo*.

Il *ker* o *nucleo* di π è l'insieme degli elementi di \mathcal{A} definito come

$$\ker(\pi) \equiv \{a \in \mathcal{A} : \pi(a) = 0 \in \mathcal{B}\} \quad (2.2.6)$$

Il *ker* di uno *-omomorfismo π è uno *-ideale, quindi bilatero, di \mathcal{A} : inoltre il $\ker(\pi)$ è una sotto C^* -algebra, con la norma indotta da \mathcal{A} . L' *Im* o *immagine* di π è definito come

$$\text{Im}(\pi) \equiv \{b \in \mathcal{B} : \exists a \in \mathcal{A} \text{ tale che } \pi(a) = b\} \quad (2.2.7)$$

Anche l' $\text{Im}(\pi)$ è una sotto C^* -algebra, ma di \mathcal{B}

Una *rappresentazione* di una C^* -algebra \mathcal{A} è una coppia (π, \mathcal{H}) , dove \mathcal{H} è uno spazio di Hilbert e $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ è uno *-omomorfismo (Ricordiamo che $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ è la C^* -algebra degli operatori limitati su \mathcal{H}). Nel caso in cui π è un'applicazione iniettiva, cioè $\ker(\pi) = \{\emptyset\}$, diremo che la rappresentazione è *fedele*.⁸

Diremo che un sottospazio vettoriale \mathcal{W} di \mathcal{H} è *invariante* sotto l'azione di $\pi(\mathcal{A})$ se $\forall A \in \pi(\mathcal{A}), \forall \psi \in \mathcal{W}$ si ha che $A\psi \in \mathcal{W}$: una rappresentazione si dirà *irriducibile* (topologicamente) se \mathcal{H} non ha sottospazi invarianti (chiusi), a meno di $\{\emptyset\}$ e \mathcal{H} . Date due rappresentazioni (π_1, \mathcal{H}_1) e (π_2, \mathcal{H}_2) diremo che esse sono *equivalenti* (unitariamente) se esiste un operatore lineare (unitario) $U: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ tale che

$$U\pi_1(a) = \pi_2(a)U \quad (2.2.8)$$

Nel caso in cui (π_1, \mathcal{H}_1) e (π_2, \mathcal{H}_2) siano due rappresentazioni irriducibili, si può mostrare che anche nel caso delle C^* -algebre vale il cosiddetto *lemma di Schur*, e cioè che ogni operatore U che soddisfa le condizioni precedenti è necessariamente o *nullo* o *invertibile*: ciò comporta che tutti gli operatori in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ che commutano con tutti gli elementi di $\pi(\mathcal{A})$ sono multipli dell'operatore identità.

Abbiamo detto prima che il *ker* di uno *-omomorfismo è un *-ideale: lo chiameremo *primitivo* se la rappresentazione in questione è irriducibile, ed indicheremo con $\text{Prim}\mathcal{A}$ l'insieme di tali ideali.

⁸Si può mostrare facilmente che una rappresentazione è fedele se e soltanto se la mappa π è un'isometria, cioè $\|\pi(a)\| = \|a\|, \forall a \in \mathcal{A}$.

2.3 Spazi Topologici e C^* -algebre

2.3.1 Il Teorema di Gelfand-Naimark

Dall'**Esempio 1.1** abbiamo imparato che ogni spazio topologico (localmente) compatto di Hausdorff è legato in maniera naturale ad una C^* -algebra commutativa (non) unitale: in questa sezione mostreremo il viceversa, e cioè che ogni C^* -algebra commutativa si può realizzare come algebra di funzioni continue su di un opportuno spazio topologico. Tale risultato, che va sotto il nome di *teorema di Gelfand-Naimark*, è noto dagli anni cinquanta, e verrà trattato qui in un certo dettaglio, in modo da elucidare il processo di riscrittura algebrica delle informazioni contenute in uno spazio topologico, che a questo punto sarà naturale chiamare “commutativo” o “ordinario”. Chiariremo poi, nella prossima sezione, cosa si intenda per spazio topologico “non commutativo”, e come tali oggetti abbiano caratteristiche matematiche interessanti, concentrandoci sugli aspetti che più risentono dei risultati della Fisica Moderna.

Introduciamo le nozioni di carattere in un'algebra di Banach \mathcal{A} , che nel nostro caso richiederemo essere unitale: accenneremo in seguito all'estensione al caso non unitale.

Un *carattere* è uno $*$ -omomorfismo $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ non triviale unitale, cioè non identicamente nullo e tale che $\mu(\mathbb{I}) = 1$; indicheremo l'insieme di tali applicazioni con $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ⁹. Un primo risultato è che $\forall a \in \mathcal{A}$ si ha che $\mu(a) \in \sigma(a)$: se, infatti, $\mu(a) \notin \sigma(a)$ si avrebbe che $(a - \mu(a)\mathbb{I})$ è invertibile in \mathcal{A} , mentre $\mu(a - \mu(a)\mathbb{I}) = \mu(a) - \mu(a)\mu(\mathbb{I}) = 0$, che non è invertibile in \mathbb{C} ¹⁰. Si ha così, dalle proprietà degli spettri della sezione precedente, che $|\mu(a)| \leq \|a\|, \forall a \in \mathcal{A}$ e quindi che $\|\mu\| \leq 1$. In verità la disuguaglianza precedente è saturata, e si ha che $\|\mu\| = 1$, in quanto deve valere anche per $a = \mathbb{I}$.

L'insieme $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è un sottoinsieme di \mathcal{A}^* , duale di \mathcal{A} : più precisamente $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è un sottoinsieme della sfera unitaria \mathcal{S}^* di \mathcal{A}^* . Ricordiamo che il duale di uno spazio di Banach è lo spazio di Banach dei funzionali lineari continui $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ muniti della norma $\|\phi\| = \sup_{a \in \mathcal{A}} \{|\phi(a)|\}$. Su \mathcal{A}^* è possibile introdurre la cosiddetta topologia *weak**, cioè la più debole topologia tale che i funzionali lineari $\psi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{C}$ siano continui¹¹. L'introduzione di tale topologia ci permetterà di usare un teorema di Banach e Alaoglu, il cui risultato è che

⁹Osserviamo che tale insieme potrebbe essere vuoto.

¹⁰Ogni omomorfismo unitale manda elementi invertibili in elementi invertibili. Ciò non è vero per gli elementi non invertibili.

¹¹Ricordiamo che ciò, per l'isomorfismo tra uno spazio di Banach ed il suo *doppio duale*, equivale a dire che $\phi = \lim_n \phi_n$, con $\phi, \phi_n \in \mathcal{A}^*$ se e soltanto se $\phi(a) = \lim_n \phi_n(a), \forall a \in \mathcal{A}$.

2.3. Spazi Topologici e C^* -algebre

\mathcal{S}^* è compatta nella topologia *weak** su \mathcal{A}^* . Osserviamo, inoltre, che tale topologia è, per definizione stessa, di Hausdorff.

Se l'algebra \mathcal{A} è commutativa, chiameremo $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ *spettro di Gelfand*; la relativa topologia indotta da \mathcal{A}^* , o, per essere più precisi, da \mathcal{S}^* , verrà chiamata *topologia di Gelfand*. Mostriamo ora il seguente lemma, che risulterà fondamentale nel seguito.

Lemma *Lo spettro di Gelfand è compatto nella topologia di Gelfand.*

Dim. Si consideri, fissati $a, b \in \mathcal{A}$, la seguente mappa

$$\phi: \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{C} : \mu \rightarrow \mu(ab) - \mu(a)\mu(b) \quad (2.3.1)$$

Tale mappa è certamente continua, in quanto se $\mu = \lim_n \mu_n$ nella topologia di $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, si ha che $\phi(\mu) = \lim_n \phi(\mu_n)$ in \mathbb{C} . Inoltre è immediato verificare che $\phi(\mu) = 0, \forall \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$: dalla continuità di ϕ si ha che essa si annulla anche su $\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$. Valutando, quindi, ϕ su un qualsiasi elemento μ di $\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$ si hanno le uguaglianze $\phi(\mu) = 0 = \mu(ab) - \mu(a)\mu(b), \forall a, b \in \mathcal{A}$, che implicano che μ è un omomorfismo, e quindi, per le proprietà di \mathcal{S}^* , un carattere. Abbiamo mostrato, così, che $\overline{\mathcal{M}(\mathcal{A})} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, e cioè che $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è un chiuso. A questo punto il lemma segue dall'osservare che un sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico compatto è compatto nella topologia indotta. \square

Gli elementi di \mathcal{A} si possono realizzare come funzioni continue su $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ assegnando ad ogni $a \in \mathcal{A}$ la funzione \hat{a} definita come

$$\hat{a} : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} : \mu \rightarrow \hat{a}(\mu) = \mu(a) \quad (2.3.2)$$

Dalla definizione stessa della topologia su $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ risulta che \hat{a} è continua. Chiameremo *trasformata di Gelfand* la mappa \mathbb{C} -lineare

$$\mathcal{G} : a \in \mathcal{A} \rightarrow \hat{a} \in C(\mathcal{M}(\mathcal{A})) \quad (2.3.3)$$

In generale tale mappa non è iniettiva né suriettiva¹². Un risultato interessante si ottiene se \mathcal{A} è una C^* -algebra: sappiamo, dalla sezione precedente, che, in tal caso, se $a \in \mathcal{A}$ è autoaggiunto si ha che $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$ e quindi, se μ è un carattere, abbiamo che $\mu(a) \in \mathbb{R}$ per qualsiasi a autoaggiunto. Ricordando che in una $*$ -algebra su \mathbb{C} ogni elemento a si può scrivere come $a = a_1 + ia_2$ ponendo $a_1 = \frac{1}{2}(a + a^*), a_2 = \frac{1}{2}(a - a^*)$, si ha che

$$\mu(a^*) = \mu(a_1 - ia_2) = \mu(a_1) - i\mu(a_2) = \overline{\mu(a_1 + ia_2)} = \overline{\mu(a)} \quad (2.3.4)$$

¹²Notiamo che, in generale, la trasformata di Gelfand non è necessariamente un omomorfismo: ciò risulta vero, però, se \mathcal{A} è un'algebra commutativa.

2.3. Spazi Topologici e C^* -algebre

Abbiamo cosí che $\widehat{a^*} = (\widehat{a})^*$, cioè che *la trasformata di Gelfand preserva la coniugazione dell'algebra*. Mostriamo ora che, nel caso in cui \mathcal{A} sia commutativa, la trasformata di Gelfand è iniettiva e suriettiva, cioè che tutte e sole le funzioni continue su $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sono i trasformati di Gelfand degli elementi di \mathcal{A} . Per far ciò dimostriamo prima il seguente

Lemma *Sia \mathcal{A} una C^* -algebra commutativa unitale e sia λ un elemento di $\sigma(a)$, fissato $a \in \mathcal{A}$. Esiste allora un carattere μ tale che $\mu(a) = \lambda$.*

Dim. Sappiamo che il nucleo di un qualsiasi $*$ -omomorfismo μ è uno $*$ -ideale chiuso: nel caso in cui $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ $\ker(\mu)$ è un ideale massimale. Si consideri infatti il quoziente $\mathcal{A}/\ker(\mu)$: sappiamo che esso si può munire di struttura di C^* -algebra, ed inoltre, osservando che

$$\hat{\mu} : \mathcal{A}/\ker(\mu) \rightarrow \mathbb{C} : [a] \rightarrow \mu(a) \quad (2.3.5)$$

è uno $*$ -isomorfismo, si giunge alla conclusione che $\mathcal{A}/\ker(\mu) \simeq \mathbb{C}$. È noto che un campo non può avere ideali non banali, in quanto un ideale dell'algebra contiene solo elementi non invertibili, e poichè $\mathcal{J}/\ker(\mu)$, con \mathcal{J} ideale proprio e $\ker(\mu) \subset \mathcal{J}$, è un ideale proprio di $\mathcal{A}/\ker(\mu)$, si ha che $\ker(\mu)$ è massimale. Vale anche il viceversa, e cioè che ad ogni ideale massimale (proprio) \mathcal{J} di \mathcal{A} corrisponde un unico carattere μ tale che $\mu(\mathcal{J}) = 0$. Sapendo che $\mathcal{A}/\mathcal{J} \simeq \mathbb{C}^{13}$, basta definire

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{J} \simeq \mathbb{C} \quad (2.3.6)$$

in modo che $[a] = \mu(a)\mathbb{I}$, con $[a] \in \mathcal{A}/\mathcal{J}$. È immediato verificare che μ è un carattere e che il suo nucleo è proprio \mathcal{J} : l'unicità segue.

A questo punto il Lemma può considerarsi dimostrato: basta infatti osservare che se $\lambda \in \sigma(a)^{14}$ si ha che $(a - \lambda\mathbb{I})$ non è invertibile in \mathcal{A} , e costruire l'ideale $\mathcal{A}(a - \lambda\mathbb{I})$, che sarà contenuto in un ideale massimale. Applicando quanto mostrato in precedenza, si costruisce μ tale che $\mu(a - \lambda\mathbb{I}) = 0$, e dunque $\mu(a) = \lambda$. \square

Abbiamo tutti gli strumenti per dimostrare il seguente

Teorema *Se \mathcal{A} è una C^* -algebra commutativa unitale, allora la trasformata di Gelfand è uno $*$ -isomorfismo isometrico di \mathcal{A} su $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$.*

Dim. Dobbiamo mostrare che \mathcal{G} è una mappa iniettiva, suriettiva ed è

¹³In un'algebra di Banach con unità, un ideale \mathcal{J} massimale contiene tutti e soli gli elementi non invertibili, e quindi il quoziente rispetto a tale ideale è un'algebra di Banach unitale in cui ogni elemento è invertibile: tali algebre, per il teorema di Mazur, sono isomorfe a \mathbb{C} .

¹⁴Ricordiamo che $\sigma(a)$ è non vuoto.

2.3. Spazi Topologici e C^* -algebre

un'isometria. A tale scopo, notiamo che, per definizione,

$$\|\hat{a}\| = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A})} \{|\hat{a}(\mu)| = |\mu(a)| \in \sigma(a)\} \quad (2.3.7)$$

Utilizzando il Lemma precedente, abbiamo che l'insieme $\{\mu(a), \forall \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$ coincide con $\sigma(a)$, $\forall a \in \mathcal{A}$, e quindi che

$$\|\hat{a}\| = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(a)\} = r(a) \quad (2.3.8)$$

Ricordando che le norme su \mathcal{A} e $C(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$ sono C^* -norme, si verifica che

$$\|\hat{a}\|^2 = \|\hat{a}^*a\| = \|\widehat{a^*a}\| = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2 \quad (2.3.9)$$

e cioè che la trasformata di Gelfand è un'isometria. Ciò implica immediatamente che essa è iniettiva, in quanto è una mappa isometrica lineare, e dunque l'unico elemento del suo nucleo è il vettore nullo. Tralasciamo, infine, la dimostrazione della suriettività della trasformata di Gelfand: basti sapere che è conseguenza immediata del teorema di Stone-Weierstrass. \square

Desideriamo, a questo punto, fare alcune osservazioni sul teorema di Gelfand-Naimark. Come detto all'inizio di questa sezione, tale teorema può essere esteso anche al caso di C^* -algebre non unitali: ad ogni algebra di Banach \mathcal{A} non unitale, infatti, può essere associata un'algebra di Banach unitale \mathcal{A}^+ ponendo $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$. Tra i caratteri di \mathcal{A}^+ ci sono anche caratteri di \mathcal{A} , e, viceversa, ogni carattere di \mathcal{A} può essere esteso in maniera unica su \mathcal{A}^+ . Basterà quindi applicare il teorema di Gelfand-Naimark a tale algebra, e togliere dallo spettro di Gelfand associato i caratteri di \mathcal{A}^+ che non sono caratteri non triviali di \mathcal{A} . Risulterà così che $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ è uno spazio topologico non compatto, ma localmente compatto, e che la trasformata di Gelfand permette di realizzare \mathcal{A} come $C_0(\mathcal{M}(\mathcal{A}))$.

Un'ulteriore osservazione che ci preme fare è un pò più concettuale, nonostante le argomentazioni siano di natura più tecnica. Il teorema di Gelfand e Naimark può essere dimostrato differentemente da quanto proposto in questa sezione. Invece di utilizzare i caratteri dell'algebra come "punti" di uno spazio topologico, avremmo potuto scegliere, ad esempio, di utilizzare lo *spazio di struttura* dell'algebra, definito come l'insieme delle classi di tutte le $*$ -rappresentazioni irriducibili unitariamente equivalenti, oppure di enfatizzare il rapporto con gli *stati* e con *la teoria delle rappresentazioni*, di cui parleremo in seguito. La cosa interessante, e che molto spesso trae in inganno, è che tutti questi oggetti sono "equivalenti" nel caso in cui \mathcal{A} sia un'algebra commutativa, mentre ciò non è vero nel caso in cui \mathcal{A} non è commutativa. Ciò ci insegna, come vedremo meglio nella prossima sezione, che

non tutte le caratteristiche degli spazi “ordinari”, come il concetto di punto, avranno necessariamente un’estensione univoca nel quadro più generale della Geometria Noncommutativa.

2.3.2 Verso gli Spazi Noncommutativi

Il teorema di Gelfand-Naimark ha come prima e immediata conseguenza che la condizione *necessaria e sufficiente* affinché un’algebra \mathcal{A} (unitale) sia una C^* -algebra è che essa si possa realizzare in maniera $*$ -isometrica come $C_0(X)$ ($C(X)$) per un qualche spazio topologico X . Una C^* -algebra, quindi, contiene molte informazioni topologiche codificate algebricamente: mostreremo ora che *tutte* le informazioni topologiche di uno spazio di Hausdorff (localmente) compatto sono contenute in $C(X)$ ($C_0(X)$). Cominciamo con l’osservare che dati X e Y due spazi topologici compatti, e una funzione continua e propria $f: X \rightarrow Y$, possiamo costruire la mappa

$$Cf : C(Y) \rightarrow C(X) : g \rightarrow g \circ f \quad (2.3.10)$$

che è uno $*$ -omomorfismo unitale, in quanto $1_X = 1_Y \circ f$: nel caso in cui f è un omeomorfismo, la mappa Cf è un isomorfismo. Analogamente, se $\phi: A \rightarrow B$, dove \mathcal{A}, \mathcal{B} sono C^* -algebre commutative unitali, è uno $*$ -omomorfismo unitale, si può costruire la mappa

$$M\phi : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A}) : \mu \rightarrow \mu \circ \phi \quad (2.3.11)$$

e verificare che essa è continua¹⁵: se ϕ è un isomorfismo, $M\phi$ è un omeomorfismo. Accenniamo brevemente al fatto che le mappe precedentemente costruite godono di proprietà “transitiva”, e cioè che per $f: X \rightarrow Y$, e $g: Y \rightarrow Z$, e per $\phi: A \rightarrow B$, e $\psi: B \rightarrow \mathcal{C}$, si ha che $C(g \circ f) = Cf \circ Cg$, e $M(\psi \circ \phi) = M\phi \circ M\psi$. A questo punto, per concludere la nostra analisi, dobbiamo analizzare qual è il rapporto tra X e $\mathcal{M}(C(X))$ se X è uno spazio topologico compatto. Notiamo, dapprima, che ogni $x \in X$ dà origine ad un carattere su $C(X)$ ponendo

$$\hat{x}: C(X) \rightarrow \mathbb{C} : \hat{x}(f) = f(x), \forall f \in C(X) \quad (2.3.12)$$

In verità ogni carattere di $C(X)$ è di questo tipo: abbiamo mostrato in precedenza che $\ker \mu$, dove μ è un carattere, è un ideale massimale di $C(X)$,

¹⁵Dalla definizione stessa di topologia di Gelfand, una funzione $f : X \rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$, dove X è un qualsiasi spazio topologico, è continua se e soltanto se $\hat{a} \circ f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è continua, $\forall a \in \mathcal{A}$. In questo caso, $\hat{a} \circ M\phi$ è certamente continua per ogni a , poichè $\hat{a} \circ M\phi(\mu) = \mu(\phi(a))$, $\forall \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$, e μ e ϕ sono mappe continue.

2.3. Spazi Topologici e C^* -algebre

e si può mostrare che esiste almeno un $x \in X$ tale che tutti gli elementi di $\ker \mu$ si annullino su di esso. In verità esiste un unico x in cui ciò accade, altrimenti $\ker \mu$ non sarebbe un ideale massimale. Inoltre, per definizione, $\ker \hat{x} = \ker \mu$, e dunque $\hat{x} = \mu$. La mappa

$$\chi_x : X \rightarrow \mathcal{M}(C(X)) : x \rightarrow \hat{x} \quad (2.3.13)$$

è suriettiva ed iniettiva, conseguenza, quest'ultima, del fatto che X è di Hausdorff: la continuità di χ_x si verifica ricordando quanto osservato nella nota 15. Abbiamo mostrato così che gli spazi X e $\mathcal{M}(C(X))$ sono omeomorfi, e cioè, detto in altre parole, che essi sono equivalenti sia dal punto di vista insiemistico che topologico.

Possiamo, così, finalmente affermare che lo studio degli spazi di Hausdorff (localmente) compatti si può ricondurre allo studio delle C^* -algebre (non) unitali di funzioni continue definite su di essi, e viceversa, che tutte le C^* -algebre commutative definiscono in maniera implicita spazi topologici¹⁶. È proprio quest'ultima osservazione che ci spinge a riguardare C^* -algebre non commutative come una sorta di “algebre di funzioni” su di uno “spazio non commutativo”, il quale, in generale, non esisterà concretamente, e costituirà, piuttosto, una sorta di “spazio virtuale”. La dualità algebra-spazio, che, nello spirito della Geometria Noncommutativa, riterremo continuare a valere anche nel caso in cui l'algebra sia non commutativa, ci permetterà di studiare oggetti le cui caratteristiche saranno ora definite su di un'algebra, e non in maniera insiemistica, rendendo così da un lato superflui, in un certo senso, alcuni concetti classici, quale quello di punto, mentre da un altro lato renderanno ancora possibile una descrizione geometrica e fisicamente interessante. Tali oggetti sono noti ai fisici, sebbene non in una formulazione così sistematica, sin dagli anni '20 del secolo scorso, quando faceva la sua comparsa la meccanica quantistica: il prototipo di interesse fisico, infatti, di spazio non commutativo è “lo spazio delle fasi” di un sistema quantistico. Il principio di Heisenberg non permette di misurare posizione e momento di una particella simultaneamente con arbitraria precisione, rendendo impossibile, così, dare senso ad una descrizione geometrica del sistema in termini di spazio delle fasi classico, e richiedendo, almeno da un punto di vista intuitivo, l'utilizzo di una nuova geometria che fosse “pointless”. A partire da Dirac, così, la teoria si è formulata in termini di “q-numeri”, operatori (autoaggiunti) non commutanti su di uno spazio di Hilbert separabile, i cui raggi costituiscono

¹⁶Nel linguaggio un po' più ermetico delle categorie, diremmo che la categoria degli spazi di Hausdorff compatti con funzioni continue e proprie è equivalente, mediante il cofuntore di Gelfand-Naimark, all'opposta categoria delle C^* -algebre commutative unitali con *-omomorfismi unitali.

2.4. Stati e Costruzione GNS.

gli stati fisici del sistema quantistico in studio. Dal nostro punto di vista, ora, l'attenzione si sposta dallo spazio di Hilbert, che viene recuperato come spazio supporto di particolari rappresentazioni, all'algebra generata da \hat{x} e \hat{p} autoaggiunti con regole di commutazione $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, che costituisce, seguendo quanto detto prima, lo *spazio delle fasi non commutativo*: la meccanica quantistica usuale, si può mostrare, è interamente recuperata in questo approccio. Come vedremo brevemente a titolo di esempio nel prossimo capitolo, è possibile, mediante le tecniche e le idee accennate in questa prima parte, descrivere sia la meccanica classica che la meccanica quantistica come teorie formulate su di un "opportuno" spazio delle fasi: ciò ci permetterà di analizzare e capire meglio non solo il processo di quantizzazione di un sistema classico, bensì anche il processo inverso, e cioè il limite classico di un sistema quantistico.

Oltre le mappe continue tra spazi topologici, è possibile estendere altre nozioni quali, ad esempio, la compattezza o la metrizzabilità: concludiamo la sezione, a questo proposito, mostrando un piccolo dizionario che schematicamente riassume qualche possibile traduzione, rimandando l'analisi dettagliata alla letteratura specialistica :

<u>Topologia</u>	<u>Algebra</u>
mappe continue e proprie	*-omomorfismi
omeomorfismi	automorfismi
compattificazione	unitizzazione
metrizzabilità	separabilità

2.4 Stati e Costruzione GNS.

In questa sezione discuteremo come sia *sempre* possibile costruire concretamente rappresentazioni di un'arbitraria C^* -algebra mediante operatori limitati su spazi di Hilbert.

Sia \mathcal{A} una C^* -algebra. Un funzionale lineare ω sulla *-algebra \mathcal{A} si dirà *positivo* se

$$\omega(a^*a) \geq 0 \tag{2.4.1}$$

per ogni $a \in \mathcal{A}$. Un funzionale lineare positivo su \mathcal{A} tale che $\|\omega\| = 1$ si dirà uno *stato*: osserviamo che uno stato è automaticamente un funzionale continuo, e che ω manda elementi positivi in elementi positivi.

L'origine della nozione di stato è meglio illustrata utilizzando una rappresentazione (π, \mathcal{H}) di \mathcal{A} . Ogni vettore ψ di \mathcal{H} normalizzato definisce uno stato

2.4. Stati e Costruzione GNS.

su \mathcal{A} ω_ψ come

$$\omega_\psi(a) \equiv (\psi, \pi(a)\psi) \quad (2.4.2)$$

per ogni $a \in \mathcal{A}$. La positività di ω_ψ è subito verificata, in quanto ,

$$\omega_\psi(a^*a) = \|\pi(a)\psi\|^2 \geq 0$$

ed inoltre si ha che $\|\omega\| = 1$. Stati di questo tipo vengono chiamati *stati vettori* della rappresentazione (π, \mathcal{H}) : anche se tale esempio di stato può sembrare molto particolare, vedremo in seguito che ogni stato di una C^* -algebra è uno stato vettore in un'opportuna rappresentazione. A tale scopo, enunciamo alcune importanti proprietà generali degli stati.

Uno stato qualsiasi ω verifica in modo generalizzato la diseuguaglianza di Cauchy-Schwartz del prodotto scalare di uno spazio di Hilbert, e cioè si ha che

$$\omega(a^*b) = \overline{\omega(b^*a)} \quad (2.4.3)$$

$$|\omega(a^*b)|^2 \leq \omega(a^*a)\omega(b^*b), \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \quad (2.4.4)$$

Inoltre, utilizzando il risultato precedente, si può mostrare in maniera non banale che valgono le seguenti proprietà per ogni stato ω :

$$\omega(a^*) = \overline{\omega(a)} \quad (2.4.5)$$

$$|\omega(a)|^2 \leq \omega(a^*a) \quad (2.4.6)$$

$$|\omega(a^*ba)| \leq \omega(a^*a)\|b\| \quad (2.4.7)$$

$$\|\omega\| = \sup\{\omega(a^*a), \|a\| = 1\} \quad (2.4.8)$$

Essendo gli stati funzionali lineari, essi possono essere sommati, come abbiamo visto nelle sezioni precedenti. In generale, però, la somma di due stati non è uno stato. Infatti, se indichiamo con ω_1 e ω_2 due funzionali lineari positivi, ma non normalizzati ad 1, si mostra che $\omega_1 + \omega_2$ è un funzionale positivo, e che

$$\|\omega_1 + \omega_2\| = \|\omega_1\| + \|\omega_2\| \quad (2.4.9)$$

Quindi se $\|\omega_1\| = \|\omega_2\| = 1$, si ha che $\|\omega_1 + \omega_2\| = 2$. Tuttavia si può mostrare che la combinazione lineare

$$\lambda\omega_1 + (1 - \lambda)\omega_2 \quad (2.4.10)$$

con $0 \leq \lambda \leq 1$ produce ancora uno stato. Ciò permette di affermare che gli stati costituiscono un sottoinsieme convesso del duale \mathcal{A} . Uno stato ω si dirà *puro* se non può essere espresso nella forma (2.4.10). Se indichiamo con $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ l'insieme degli stati, si può mostrare che gli stati puri $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ sono i punti

2.4. Stati e Costruzione GNS.

estremali dell'insieme $\mathcal{E}(\mathcal{A})$.

Passiamo ora alla costruzione di rappresentazioni di una C^* -algebra arbitraria \mathcal{A} : abbiamo visto in precedenza che data una rappresentazione (π, \mathcal{H}) tutti i vettori unitari di \mathcal{H} definiscono uno stato su \mathcal{A} . Viceversa, mostreremo che per ogni stato ω su \mathcal{A} esiste *sempre* una rappresentazione $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ ed un vettore unitario $\psi_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ tale che

$$\omega(a) = (\psi_\omega, \pi_\omega(a)\psi_\omega) \quad (2.4.11)$$

per qualsiasi $a \in \mathcal{A}$.

L'idea dietro a questa costruzione è molto semplice. Prima di tutto, si “fabbrica” uno spazio di Hilbert \mathcal{H}_ω a partire dallo stato ω osservando che l'algebra \mathcal{A} è uno spazio di Banach. Usando le proprietà (2.4.3) e (2.4.4) di ω , possiamo definire su \mathcal{A} un prodotto scalare semidefinito positivo come

$$(a, b) \equiv \omega(a^*b), \quad \forall a, b \in \mathcal{A} \quad (2.4.12)$$

che converte \mathcal{A} in uno spazio pre-hilbertiano¹⁷, cioè non completo nella metrica indotta dal prodotto scalare (2.4.12).

Definiamo ora \mathcal{I}_ω come

$$\mathcal{I}_\omega \equiv \{a \in \mathcal{A} : \omega(a^*a) = 0\} \quad (2.4.13)$$

Usando la proprietà (2.4.4) ed il fatto che per qualsiasi $b \in \mathcal{I}_\omega$ e per qualsiasi $a \in \mathcal{A}$ si ha dalla proprietà (2.4.8) che

$$0 \leq \omega((ab)^*ab) \leq \|a\|^2\omega(b^*b) = 0 \quad (2.4.14)$$

si mostra che \mathcal{I}_ω è un ideale sinistro. Si considerino le classi di equivalenza rispetto all'ideale \mathcal{I}_ω , che saranno date da

$$\psi_a \equiv \{a + b, \text{ con } b \in \mathcal{I}_\omega\} \quad (2.4.15)$$

A questo punto, osservando che le classi di equivalenza ψ_a costituiscono uno spazio vettoriale se si definisce $\psi_a + \psi_b \equiv \psi_{a+b}$ e $\psi_{\alpha a} \equiv \alpha\psi_a$, si può definire su tale spazio un prodotto scalare

$$(\psi_a, \psi_b) \equiv \omega(a^*b) \quad (2.4.16)$$

che si può mostrare essere indipendente dalla scelta del rappresentativo e definito positivo. A questo punto possiamo utilizzare il teorema del completamento, e chiamare tale completamento \mathcal{H}_ω , che sarà lo spazio di Hilbert

¹⁷In verità tale notazione non è precisa, in quanto il prodotto scalare (2.4.12) non è definito positivo.

2.4. Stati e Costruzione GNS.

su cui costruiremo una rappresentazione di \mathcal{A} . Come definire gli operatori $\pi_\omega(a)$ che rappresentano \mathcal{A} su \mathcal{H}_ω ? Specifichiamo dapprima l'azione di $\pi_\omega(a)$ sulle combinazioni lineari finite dei vettori ψ_a come

$$\pi_\omega(a)\psi_b \equiv \psi_{ab}, \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (2.4.17)$$

Notiamo che la relazione precedente è indipendente dal rappresentativo scelto per la classe ψ_b perché

$$\pi_\omega(a)\psi_{b+c} = \psi_{ab+ac} = \psi_{ab} = \pi_\omega(a)\psi_b \quad (2.4.18)$$

per qualsiasi $c \in \mathcal{I}_\omega$. Ogni $\pi_\omega(a)$ è un operatore lineare perché

$$\begin{aligned} \pi_\omega(a)(\lambda\psi_b + \psi_c) &= \pi_\omega(a)\psi_{\lambda b+c} = \psi_{\lambda ab+ac} \\ &= \lambda\psi_{ab} + \psi_{ac} \\ &= \lambda\pi_\omega(a)\psi_b + \pi_\omega(a)\psi_c \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Usando la proprietà (2.4.8) è facile verificare che

$$\begin{aligned} \|\pi_\omega(a)\psi_b\|^2 &= (\psi_{ab}, \psi_{ab}) \\ &= \omega(b^*a^*ab) \\ &\leq \|a\|^2\omega(b^*b) \\ &= \|a\|^2\|\psi_b\|^2 \end{aligned}$$

e che quindi $\pi_\omega(a)$ è un operatore limitato su \mathcal{H}_ω . Le proprietà algebriche della mappa π_ω seguono facilmente

$$\pi_\omega(a_1)\pi_\omega(a_2)\psi_b = \psi_{a_1a_2b} = \pi_\omega(a_1a_2)\psi_b$$

Abbiamo costruito cosí una rappresentazione $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$: resta da specificare il vettore ψ_ω che verifichi la (2.4.11). Nel caso in cui \mathcal{A} abbia un'unità¹⁸ si puó definire

$$\psi_\omega = \psi_{\mathbb{1}} \quad (2.4.20)$$

e si verifica che

$$\begin{aligned} (\psi_\omega, \pi_\omega(a)\psi_\omega) &= (\psi_{\mathbb{1}}, \psi_a) \\ &= \omega(a) \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

Inoltre il vettore ψ_ω soddisfa un'altra proprietà: è *ciclico* per la rappresentazione $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$, e cioè le combinazioni lineari degli elementi dell'insieme

¹⁸Nel caso in cui l'algebra \mathcal{A} non abbia un unità il discorso seguente è ancora valido se si considera $\mathcal{A} \oplus \mathbb{I}$, ma la prova di ciclicità di ψ_ω è un pó più delicata.

2.4. Stati e Costruzione GNS.

$\{\pi_\omega(a)\psi_\omega : \forall a \in \mathcal{A}\}$ sono dense in \mathcal{H}_ω . Abbiamo così parzialmente mostrato la prima parte del seguente teorema:

Teorema *Sia ω uno stato su di una C^* -algebra \mathcal{A} . Segue allora che esiste una rappresentazione ciclica $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$ di \mathcal{A} tale che*

$$\omega(a) = (\psi_\omega, \pi_\omega(a)\psi_\omega) \quad (2.4.22)$$

per ogni $a \in \mathcal{A}$ e, di conseguenza, $\|\psi_\omega\| = \|\omega\| = 1$. Inoltre, tale rappresentazione è unica a meno di unitaria equivalenza.

La rappresentazione $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \psi_\omega)$ associata allo stato ω viene chiamata *costruzione GNS (Gelfand-Naimark-Segal) associata ad ω* .

La caratteristica della rappresentazione GNS di essere ciclica è molto importante in quanto si può mostrare che ogni rappresentazione (π, \mathcal{H}) non degenera di una C^* -algebra \mathcal{A} è somma diretta di sottorappresentazioni cicliche. A tale proposito enunciamo un risultato che è molto importante per lo studio delle rappresentazioni irriducibili di una C^* -algebra

Teorema *Sia ω uno stato su di una C^* -algebra \mathcal{A} e sia $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ la rappresentazione GNS associata ad ω . Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- a) $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ è irriducibile*
- b) ω è uno stato puro*

È chiaro a questo punto l'importanza degli stati per lo studio di una C^* -algebra astrattamente definita: è lecito chiedersi, però, se effettivamente l'insieme degli stati sia *sempre* diverso dall'insieme vuoto. Fortunatamente, si riesce a mostrare che esistono sempre degli stati.

Concludiamo questa sezione enunciando un teorema che mette insieme tutti i risultati finora ottenuti, e che rappresenta, a nostro avviso, uno dei cardini della teoria delle C^* -algebre.

Teorema (Gelfand-Naimark-Segal) *Sia \mathcal{A} una C^* -algebra. Allora \mathcal{A} è isometricamente $*$ -isomorfa ad una sottoalgebra degli operatori limitati su di uno spazio di Hilbert.*

Osservazione. *Gli strumenti tecnici introdotti in questa sezione ricoprono un ruolo centrale nella formulazione algebrica della meccanica quantistica, avviata da Segal a metà degli anni quaranta. In tale approccio, un sistema fisico è descritto assiomaticamente da una C^* -algebra \mathcal{A} astratta la cui parte autoaggiunta \mathcal{A}_{aa} contiene gli osservabili del sistema in esame. Uno stato ω del sistema sarà uno "stato" come definito precedentemente, ovvero un funzionale lineare positivo su \mathcal{A} : il numero reale $\omega(a)$ dell'elemento autoaggiunto*

2.4. Stati e Costruzione GNS.

a è interpretato come “il valore di aspettazione dell’osservabile a nello stato ω ”. Si può mostrare che ogni stato ω induce una misura μ_ω sullo spettro dell’elemento a : fisicamente, tale misura si interpreta come la distribuzione di probabilità dei valori possibili per l’osservabile a quando il sistema si trova nello stato ω . La formulazione in termini di operatori sullo spazio di Hilbert si ha passando alla rappresentazione GNS di A associata ad ω : se ω è uno stato puro, la rappresentazione è irriducibile, e ad ω è associato il vettore ψ_ω tale che valga la (2.4.22). Gli stati che sono non puri non si possono realizzare come vettori dello spazio \mathcal{H}_ω , e corrispondono, nella formulazione ordinaria, alle matrici densità. Nel caso in cui l’algebra A non sia semplice, è possibile che esistano rappresentazioni irriducibili non “fisicamente” equivalenti tra di loro: la scelta di una rappresentazione diventa allora una questione fondamentale. Ciò corrisponde, nella teoria quantistica dei campi, alla scelta di uno stato di vuoto: diversi vuoti “etichettano” differenti sistemi fisici. Per una lucida introduzione all’utilizzo di metodi algebrici in meccanica quantistica si rimanda a [Seg47] e [RR69].

Capitolo 3

Spazi Noncommutativi

In questo capitolo riprenderemo quanto accennato nella sezione 2.3.2 circa la possibilità di formulare anche la meccanica quantistica su di uno spazio delle fasi noncommutativo, ottenuto come “deformazione” di quello classico. A tale proposito, studieremo in dettaglio due spazi di importanza rilevante: il piano ed il toro noncommutativo.

Nelle seguenti sezioni richiamiamo qualche nozione circa la descrizione di sistemi classici e quantistici, cercando di evidenziare soprattutto le differenze del formalismo matematico utilizzato nelle due descrizioni.

3.1 Lo Spazio delle Fasi della Meccanica Classica.

Sappiamo che la meccanica classica può essere formulata geometricamente come una teoria di campi vettoriali e forme differenziali su di una varietà differenziabile, i cui osservabili sono descritti mediante funzioni (reali) su tale varietà. Nel quadro Hamiltoniano, lo stato del sistema è identificato con un punto dello spazio delle fasi \mathcal{M} , una varietà C^∞ $2n$ -dimensionale munita di una *parentesi di Poisson*. Ricordiamo brevemente che una parentesi di Poisson può essere definita algebricamente come una mappa

$$\{ \cdot, \cdot \} : C^\infty(\mathcal{M}) \times C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{M}) \quad (3.1.1)$$

3.1. *Lo Spazio delle Fasi della Meccanica Classica.*

con $C^\infty(\mathcal{M})$ algebra delle funzioni a valori complessi infinitamente differenziabili, e soddisfacente le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}\{\alpha f + \beta g, h\} &= \alpha\{f, h\} + \beta\{g, h\} \\ \{f, g\} &= -\{g, f\} \\ \{fg, h\} &= f\{g, h\} + \{f, h\}g\end{aligned}$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g, h \in C^\infty(\mathcal{M})$, ed in più soddisfa l'identità di Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \quad (3.1.2)$$

L'evoluzione temporale di un'osservabile f , che può anche dipendere dal tempo in maniera esplicita, è stabilita dalla seguente relazione

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \quad (3.1.3)$$

dove H è l'Hamiltoniana del sistema.

Osserviamo che la parentesi di Poisson di due funzioni f e g può esprimersi in un sistema di coordinate locali come¹

$$\{f, g\} = \Lambda^{ij} \partial_i f \partial_j g \quad (3.1.4)$$

dove Λ^{ij} sono le componenti di un campo bivettoriale antisimmetrico nella base $\partial_i \otimes \partial_j$. Nel caso in cui si stia studiando la dinamica di particelle il cui spazio delle posizioni sia una varietà \mathcal{Q} n -dimensionale, allora lo spazio delle fasi sarà dato dal fibrato cotangente $\mathcal{M} = T^*\mathcal{Q}$. È noto che tale varietà possiede una struttura simplettica, cioè una 2-forma ω chiusa e non degenere, naturale, che può esprimersi come $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$, in un sistema di coordinate locali tali che $\{q^i, p_j\} = \delta_j^i$. Dato che la forma ω è non degenere, possiamo costruire la parentesi di Poisson ad essa associata, che in sistema di coordinate canonico si esprime come

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \quad (3.1.5)$$

¹In generale è possibile definire una parentesi di Poisson su di una varietà mediante un campo bivettoriale che soddisfa particolari proprietà, rendendo così tale struttura più debole di quella di varietà simplettica.

3.2 Lo Spazio delle Fasi della Meccanica Quantistica.

Il quadro concettuale prima delineato non sembra poter avere un'applicazione nella descrizione dei sistemi fisici microscopici. Per un sistema quantistico, infatti, la costruzione di uno spazio delle fasi che ha la struttura di varietà di Poisson è ostacolata dall'impossibilità di misurare simultaneamente una coppia qualsiasi di osservabili: non è possibile conoscere, in particolare, posizione e momento di una particella. La teoria diventa così intrinsecamente statistica, permettendo di conoscere soltanto probabilità di esiti di misure. Ciò forza ad utilizzare una formulazione matematica radicalmente differente, almeno a prima vista: gli osservabili quantistici sono descritti da operatori lineari autoaggiunti su di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , e gli stati fisici del sistema sono raggi di tale spazio. Il processo di quantizzazione avviene, almeno nella formulazione standard o "canonica" della meccanica quantistica, mediante il *principio di corrispondenza* del sistema classico associato: lo spazio di Hilbert è $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathcal{Q}, d^n q)$, mentre valgono le seguenti regole

$$\begin{aligned} q^i &\rightarrow \hat{q}^i \\ p_j &\rightarrow \hat{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^j} \end{aligned}$$

con \hat{q}^i operatore moltiplicativo per l' i -esima variabile indipendente, e dove (q^i, p_j) sono un sistema di coordinate cartesiane² canoniche per \mathbb{R}^{2n} . È agevole verificare che, almeno formalmente, tali operatori soddisfano le regole di commutazione canonica $[\hat{q}^i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_j^i \mathbb{I}$, ed è noto che tali regole conducono direttamente alle diseguaglianze di Heisenberg. Osserviamo che il principio di corrispondenza così illustrato altri non è che una realizzazione irriducibile delle regole di commutazione canonica su di un particolare spazio di Hilbert, ed è detta realizzazione *nello spazio delle posizioni*. Un celebre teorema dovuto a Von Neumann e, in un certo senso, a Weyl, mostra che tale realizzazione, a meno di unitaria equivalenza, è unica, e che quindi la teoria può essere formulata senza porsi in una particolare rappresentazione³.

L'evoluzione temporale di un osservabile A sarà data, nella rappresentazione di Heisenberg, da

$$\dot{A} = i\hbar[H, A] + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.2.1)$$

²È importante notare che, a causa del teorema di Von Neumann, la richiesta che (q^i, p_j) siano un sistema di coordinate canoniche "rettangolari" è fondamentale.

³Tale teorema cessa di valere nel caso in cui il sistema abbia un numero non finito di gradi di libertà.

3.3. Mappa di Weyl e di Wigner.

dove H è l'operatore associato all'hamiltoniana classica del sistema.

3.3 Mappa di Weyl e di Wigner.

Da quanto mostrato nelle precedenti sezioni, risulta chiaro che il processo di quantizzazione canonica rompe la struttura formale della meccanica classica, che invece può essere formulata in maniera da mostrare i profondi legami con la meccanica quantistica. In quest'ultima, il ruolo fondamentale è giocato da un'algebra, quella degli osservabili, o meglio degli operatori definiti sullo spazio di Hilbert. Nello spirito della dualità algebra-spazio del capitolo precedente, è naturale a questo punto spostare l'attenzione dallo spazio delle fasi al suo duale, l'algebra delle funzioni a valori complessi. Il legame tra meccanica classica e quantistica è dato ora dalla *mappa di Weyl*, che assegna ad osservabili classiche, funzioni sullo spazio delle fasi, osservabili quantistiche, operatori sullo spazio di Hilbert. Per introdurre tale strumento tecnico, utilizzeremo la forma esponenziata, o di Weyl, delle regole di commutazione canoniche: è ben noto, infatti, che l'algebra generata dagli operatori di posizione e momento canonicamente commutanti non può essere rappresentata come sottoalgebra degli operatori limitati su di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ⁴. Ciò comporta notevoli problemi circa i domini degli operatori e sulla loro esplicita realizzazione. D'altro canto, i gruppi unitari ad un parametro reale fortemente continui

$$U(\xi) = e^{i\xi\hat{q}} \quad V(\eta) = e^{i\eta\hat{p}} \quad (3.3.1)$$

sono rappresentabili con operatori limitati e definiti su tutto \mathcal{H} . Se lo spazio delle fasi classico è una varietà lineare simplettica, che noi supporremo essere \mathbb{R}^2 , si può introdurre il seguente operatore unitario

$$W(\xi, \eta) = e^{\frac{i}{\hbar}(\xi\hat{x} + \eta\hat{p})} \quad (3.3.2)$$

e si può verificare che, posto $z \equiv (\xi, \eta)$, $z' \equiv (\xi', \eta')$

$$W(z + z') = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega(z, z')}W(z)W(z') \quad (3.3.3)$$

dove ω è la forma simplettica su \mathbb{R}^2 data da $\omega(z, z') = \xi\eta' - \eta\xi'$. L'operatore W dipendente da z viene chiamato *sistema di Weyl* ⁵: possiamo a questo

⁴Tale risultato prende il nome di *teorema di Wintner*.

⁵In generale, data una varietà simplettica lineare S , un sistema di Weyl è una rappresentazione *proiettiva* unitaria fortemente continua del gruppo delle traslazioni che agisce su S , in cui la fase è caratterizzata dalla forma simplettica.

3.3. Mappa di Weyl e di Wigner.

punto costruire la *mappa di Weyl*

$$f(q, p) \rightarrow \hat{\Omega}_f(\hat{q}, \hat{p}) = \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) W(\xi, \eta) \quad (3.3.4)$$

dove $\tilde{f}(\xi, \eta)$ è la trasformata di Fourier di f in \mathbb{R}^2 con la misura di Lebesgue, e l'integrale operatoriale è inteso in senso debole⁶. Un primo risultato interessante è che a funzioni reali la mappa di Weyl associa, almeno formalmente, operatori autoaggiunti: inoltre, nella definizione da noi proposta è implicito gli operatori assegnati sono ordinati simmetricamente, o secondo Weyl. Altri tipi di ordinamento, come quello di Wick, sono possibili se si inserisce nell'integrale una sorta di *peso* $g(\xi, \eta)$: nel caso di ordinamento simmetrico, o di Weyl, la funzione $g(\xi, \eta)$ vale 1.

La mappa di Weyl ha un'inversa, detta *mappa di Wigner*, che gioca il ruolo di "dequantizzare" il sistema, associando ad un operatore quantistico quello che viene chiamato *simbolo*, un funzione sullo spazio delle fasi. Più precisamente, la mappa di Wigner è definita come

$$\hat{F} \rightarrow \tilde{\Omega}'_F(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\hbar} \text{Tr}(\hat{F}W^\dagger(\xi, \eta)) \quad (3.3.5)$$

Ovviamente, la possibilità di applicazione di tali mappe dipende dalle caratteristiche delle funzioni e degli operatori in esame: si può mostrare, però, che la mappa di Weyl, e la sua inversa, costituiscono, in generale, un isomorfismo tra $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{2n}, d^{2n}x)$ e la classe degli operatori di Hilbert-Schmidt su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$. È interessante notare che tale procedura di quantizzazione è fortemente geometrica, in quanto nella definizione stessa di sistema, e quindi di mappa di Weyl sono contenute le informazioni sulla struttura симпlettica dello spazio delle fasi classico.

L'analogia tra meccanica classica e meccanica quantistica non è, però, ancora completa. Ciò è dovuto al fatto che le applicazioni prima definite non sono omomorfismi tra l'algebra delle funzioni sullo spazio delle fasi classico e l'algebra degli operatori su \mathcal{H} : il simbolo del prodotto di due funzioni non corrisponde infatti al prodotto dei due simboli. Per ovviare a questo problema, nella prossima sezione introdurremo un nuovo prodotto tra gli osservabili classici, e mostremo in che modo tale prodotto dipenda dalla lunghezza di Planck \hbar .

⁶Ciò vuol dire che l'operatore $\hat{\Omega}_f$ è tale che

$$(\psi, \hat{\Omega}_f \phi) = \int d\xi d\eta \tilde{f}(\xi, \eta) (\psi, W(\xi, \eta) \phi), \quad \forall \psi, \phi \in \mathcal{H}$$

3.4 Quantizzazione di Moyal e Deformazioni.

Come sottolineato in precedenza, lo spazio delle fasi della meccanica classica ha la peculiarità di essere un varietà di Poisson, la cui parentesi stabilisce l'evoluzione dinamica degli osservabili, una volta assegnata l'Hamiltoniana del sistema. È chiaro, inoltre, per quanto osservato alla fine della precedente sezione, che la mappa di Weyl non associa alla parentesi di Poisson di due osservabili classici il commutatore dei rispettivi osservabili quantistici. Mediante la mappa di Wigner, comunque, possiamo sapere quale espressione di due funzioni classiche f e g la mappa di Weyl associa al commutatore di due operatori. Si ottiene così, con una notazione un pò semplificata, e nel caso di due variabili

$$\Omega'([\Omega(f), \Omega(g)]) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{2k+1} f(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)^{2k+1} g \quad (3.4.1)$$

che al primo ordine in \hbar coincide con l'ordinaria parentesi di Poisson⁷ (Le frecce indicano il membro a cui va applicata l'operatore di derivazione). L'espressione precedente può essere espressa in maniera intrinseca nella seguente maniera

$$[f, g]_{\star} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^{2k+1} \Lambda^{2k+1}(f, g) \quad (3.4.2)$$

dove $\Lambda^k(f, g) \equiv \Lambda^{i_1 j_1} \Lambda^{i_2 j_2} \dots \Lambda^{i_k j_k} \partial_{i_1 i_2 \dots i_r} f \partial_{j_1 j_2 \dots j_r} g$, con $i_l, j_l = q, p$, $l = 1, 2, \dots, k$ e dove Λ è il bivettore antisimmetrico che definisce la struttura di Poisson. L'espressione precedente è chiamata comunemente *parentesi di Moyal*: è naturale chiedersi, a questo punto, se esista un nuovo prodotto (associativo) nell'algebra delle funzioni sullo spazio delle fasi classico in modo che

$$[f, g]_{\star} = f \star g - g \star f \quad (3.4.3)$$

Nel nostro caso tale prodotto, chiamato comunemente *star-product*, può essere definito come

$$f \star g \equiv \Omega'(\Omega(f)\Omega(g)) \quad (3.4.4)$$

e, utilizzando la forma esplicita della mappa di Weyl, si può mostrare che

$$f \star g = e^{i\hbar \Lambda^{ij} \partial_{\xi_i} \partial_{\eta_j}} f(\xi) g(\eta) \Big|_{\xi=\eta=u} \quad (3.4.5)$$

⁷Notiamo che tale espressione è ovviamente formale, in quanto non abbiamo stabilito alcun criterio topologico per la convergenza della serie nella definizione, né tantomeno il suo dominio funzionale di applicabilità.

3.4. Quantizzazione di Moyal e Deformazioni.

dove u corrisponde ad un punto nello spazio delle fasi. Come ci si aspettava, al primo ordine in \hbar lo \star -product coincide con il prodotto usuale.

A questo punto è chiaro che gli effetti quantistici si manifestano nella non commutatività del prodotto degli osservabili classici in maniera tale da restituire la struttura geometrica commutativa della teoria per $\hbar \rightarrow 0$.

Tale approccio alla meccanica quantistica si inquadra in un filone di pensiero fisico-matematico sviluppatosi negli anni settanta ad opera di Flato ed altri [BFF⁺78], che si basa sul concetto di *deformazione*. Ogni teoria fisica è caratterizzata, oltre che da una struttura formale matematica, da parametri fondamentali (la velocità della luce, la lunghezza di Planck, etc.) che usualmente determinano la “scala” e il dominio di applicabilità della teoria stessa. Esperimenti che contraddicono in qualche maniera la teoria introdurranno nuovi parametri e nuove strutture che *deformano* quelle iniziali: per valori limite di tali parametri (usualmente 0 o ∞) richiediamo che sia restituita la teoria originale. Il problema consiste, però, nel capire quali strutture debbano essere preservate dalla deformazione, o, in un linguaggio più matematico, in quale categoria cercare la deformazione. Seguendo questo nuovo punto di vista, diremo che la meccanica quantistica è una deformazione della meccanica classica nella categoria delle varietà di Poisson estesa al caso non commutativo. L’idea intuitiva che la meccanica classica sia il *limite* per $\hbar \rightarrow 0$ della meccanica quantistica viene formulata in maniera strutturale e matematicamente precisa in questo nuovo quadro. Vogliamo osservare inoltre che la *quantizzazione per deformazione*, come viene spesso chiamata, non è una mera riscrittura della meccanica quantistica operatoriale, bensì si mostra come una formulazione autonoma della fisica dei sistemi microscopici: una generica varietà di Poisson a connessione non piatta ⁸, che appare nella trattazione dei sistemi vincolati, non può essere infatti quantizzata nella maniera che abbiamo qui proposto, data l’impossibilità, in generale, di dare senso ai sistemi di Weyl. Ciò significa che l’algebra delle funzioni su di una varietà di Poisson, deformata da un generico \star -product, non potrà essere sempre rappresentata in maniera soddisfacente in termini di operatori, ingrediente indispensabile sia per una formulazione “ordinaria” della meccanica quantistica, sia per lo studio di tali oggetti con i metodi della Geometria Noncommutativa nell’approccio alla Connes.

⁸Risultati in questa direzione sono stati ottenuti abbastanza recentemente da Kontsevich, che ha proposto un metodo per costruire \star -product per una varietà di Poisson generica

3.5. Il Piano Noncommutativo.

Questa breve introduzione ai metodi della quantizzazione per deformazione ci ha permesso di acquisire alcune idee fondamentali circa lo studio degli spazi noncommutativi. Nelle seguenti sezioni analizzeremo in dettaglio il piano ed il toro noncommutativo, e mostreremo inoltre qualche caso di interesse fisico in cui tali oggetti appaiono naturalmente.

3.5 Il Piano Noncommutativo.

Si consideri la $*$ -algebra \mathcal{A}^θ su \mathbb{C} generata dagli elementi \hat{x}^i autoaggiunti tali che⁹

$$\begin{aligned} [\hat{x}^i, \hat{x}^j]_* &= i\theta^{ij}\mathbb{I} \\ [\hat{x}^i, \mathbb{I}]_* &= 0 \quad i, j = 1, 2 \end{aligned}$$

con $[\hat{x}^i, \hat{x}^j]_* = \hat{x}^i * \hat{x}^j - \hat{x}^j * \hat{x}^i$, e dove θ^{ij} è una matrice antisimmetrica, che nel nostro caso possiamo porre come

$$\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.5.1}$$

con $\theta > 0$. Ogni elemento dell'algebra si potrà esprimere, per definizione, come una serie formale di potenze in \hat{x}^1 e \hat{x}^2 a coefficienti complessi: più precisamente, se indichiamo le relazioni di commutazione con \mathcal{R}_θ e l'anello delle combinazioni formali di potenze a coefficienti complessi con $\mathbb{C}[[x^1, x^2]]$ abbiamo che

$$\mathcal{A}_\theta \simeq \mathbb{C}[[x^1, x^2]]/\mathcal{R}_\theta \tag{3.5.2}$$

Chiameremo, a questo punto, *piano non commutativo* \mathbb{R}_θ^2 la $*$ -algebra \mathcal{A} . È possibile costruire in maniera abbastanza agevole una rappresentazione (formale) di \mathcal{A}_θ , su di uno spazio di Hilbert separabile \mathcal{H} . Introduciamo a questo proposito i seguenti elementi

$$\hat{a} = \frac{\hat{x}^1 + i\hat{x}^2}{\sqrt{2\theta}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{x}^1 - i\hat{x}^2}{\sqrt{2\theta}} \tag{3.5.3}$$

che verificano per costruzione

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{I} \tag{3.5.4}$$

⁹Tali elementi vengono spesso chiamati "coordinate non commutanti", anche se il termine è alquanto improprio.

3.5. Il Piano Noncommutativo.

Sappiamo che tale algebra di Lie ammette una rappresentazione irriducibile su di uno spazio di Hilbert separabile \mathcal{H} , richiedendo che \hat{a}^\dagger sia l'aggiunto formale di \hat{a} e che l'operatore *numero* $N = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ abbia almeno un autovettore $|n\rangle$ di autovalore $n \geq 0$. Sotto tali ipotesi si può mostrare che lo spettro (puntuale) di N è \mathbb{N} , ed è quindi non degenere, e che esiste l'autovettore $|0\rangle$ di autovalore 0 tale che $\hat{a}|0\rangle = 0$. Si può scegliere, inoltre, una rappresentazione di Fock di \mathcal{H} con base ortonormale gli autovettori $|n\rangle$ di N con autovalore n : in tale rappresentazione gli operatori \hat{a} e \hat{a}^\dagger agiscono come operatori di *creazione* e *distruzione* rispettivamente, e cioè

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \text{per } n \geq 1 \quad (3.5.5)$$

Una delle caratteristiche del piano commutativo è quella di essere un'orbita del gruppo delle traslazioni bidimensionali $\mathcal{T}^2 \simeq \mathbb{R}^2$: è facile vedere che tale azione per omeomorfismi sul piano viene tradotta algebricamente in un'azione di \mathcal{T}^2 per *-automorfismi sull'algebra delle funzioni continue (che vanno a zero all'infinito) sul piano. Sia infatti

$$\phi: g \in \mathcal{T}^2 \rightarrow \phi_g \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2) \quad (3.5.6)$$

dove con $\text{Hom}(\mathbb{R}^2)$ indichiamo gli omeomorfismi di \mathbb{R}^2 . L'azione canonica di \mathcal{T}^2 su $C_0(\mathbb{R}^2)$ sarà data semplicemente da

$$\tilde{\phi}: g \in \mathcal{T}^2 \rightarrow \tilde{\phi}_g \in \text{Aut}(C_0(\mathbb{R}^2)) \quad (3.5.7)$$

dove $\tilde{\phi}_g$ è definita come segue

$$\tilde{\phi}_g(f)(x) \equiv f(\phi_g(x)) \quad (3.5.8)$$

$\forall g \in \mathcal{T}^2, \forall f \in C_0(\mathbb{R}^2), \forall x \in \mathbb{R}^2$. Si mostra agevolmente, inoltre, che $\tilde{\phi}_g$ preserva la struttura lineare e l'involuzione dell'algebra delle funzioni continue, e che è invertibile $\forall g \in \mathcal{T}^2$. È ragionevole, a questo punto, caratterizzare il piano non commutativo con un'azione delle traslazioni per automorfismi sulla sua "algebra delle funzioni continue". Si potrebbe pensare, un pò euristicamente, di assegnare ad ogni traslazione bidimensionale una rispettiva traslazione delle "coordinate non commutanti" \hat{x}^i : è immediato verificare che tale trasformazione non preserva la struttura lineare dell'algebra, e tantomeno è un'automorfismo. La nostra costruzione del piano non commutativo, perciò, non si presta bene ad un tale tipo di analisi, fermo restando il fatto che essa è probabilmente la più idonea per le applicazioni alla fisica, in particolare alla meccanica quantistica. Tale risultato, in verità, non deve sorprenderci: il piano noncommutativo da noi proposto, infatti, è meramente algebrico, e, per così dire, non contiene informazioni topologiche. Non

3.5. Il Piano Noncommutativo.

abbiamo infatti introdotto una norma, che, per quanto appreso nel primo capitolo, è un'ingrediente fondamentale per la Geometria Noncommutativa nella formulazione di Connes, ed inoltre l'utilizzo di coordinate è in un certo senso un retaggio della geometria puntuale. Desideriamo, per questi motivi, mostrare un approccio diverso, che fa' utilizzo delle tecniche di deformazione discusse nelle precedenti sezioni, permettendo di superare, in una qualche maniera, le difficoltà sopra esposte.

Sia $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^2)$ l'insieme delle funzioni $f(x)$ a valori complessi tali che

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| x_1^\alpha x_2^\beta \frac{\partial^{\alpha+\beta} f(x)}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta} \right| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \quad (3.5.9)$$

Tali funzioni vengono chiamate *a decrescenza rapida*: è noto che la trasformata di Fourier bidimensionale agisce su $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^2)$ come uno *-automorfismo. Ogni funzione a decrescenza rapida potrà essere espressa, quindi, nella seguente forma integrale

$$f(x) = \int d^2k \tilde{f}(k) e^{ik_i x^i} \quad (3.5.10)$$

L'esistenza della trasformata di Fourier per ogni $f(x)$ che appartiene ad $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^2)$ ci garantisce che la mappa di Weyl è ben definita su tale spazio lineare. Per comodità di esposizione, e per altri motivi che saranno chiari in seguito, introduciamo brevemente la definizione di quantizzatore ed alcune sue proprietà. Data una varietà simplettica X , una misura μ su X ed uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , chiameremo *quantizzatore di Moyal* una mappa $\hat{\Delta}: X \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ che soddisfa le seguenti proprietà

$$\begin{aligned} \text{Tr} \hat{\Delta}(x) &= 1 \\ \text{Tr} \hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) &= \delta(x - y), \quad \forall x, y \in X \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

dove le uguaglianze vanno intese in senso distribuzionale. A questo punto si può definire come *quantizzazione* la mappa

$$f(x) \rightarrow \int_X \mu(x) f(x) \hat{\Delta}(x) \equiv \hat{\Omega}(f) \quad (3.5.12)$$

dove $f(x)$ è una funzione definita su X che gode di proprietà di regolarità tali che l'espressione precedente abbia senso. Analogamente si può definire come *dequantizzazione* la mappa

$$\hat{A} \rightarrow \text{Tr} \hat{A} \hat{\Delta}(x) \equiv \Omega^{-1}(\hat{A})(x) \quad (3.5.13)$$

dove la scelta della notazione indica che le due mappe sono una l'inverso dell'altra, come si può provare utilizzando le proprietà del quantizzatore. Nel

3.5. Il Piano Noncommutativo.

caso in cui X sia l'orbita di un gruppo di Lie \mathcal{G} , μ sia una misura invariante, e \mathcal{H} sia sede di una rappresentazione unitaria proiettiva $U(g)$ del gruppo, diremo che il quantizzatore è *equivariante* per l'azione di \mathcal{G} se

$$U(g)\hat{\Delta}(x)U^\dagger(g) = \hat{\Delta}(g \cdot x), \quad \forall x \in X, \forall g \in \mathcal{G} \quad (3.5.14)$$

dove con $g \cdot x$ abbiamo indicato l'azione di \mathcal{G} su X . Nel nostro caso abbiamo che $X = \mathbb{R}^2$ con la forma simplettica canonica, μ è la misura di Lebesgue d^2x , e $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, dx)$. Definendo l'operatore autoaggiunto

$$\hat{\Delta}(x) \equiv \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{ik_i x^i} e^{-ik_i \hat{x}^i} \quad (3.5.15)$$

dove \hat{x}^i sono una rappresentazione su \mathcal{H} dell'algebra di Lie $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}\mathbb{I}$, la mappa di Weyl può esprimersi come¹⁰

$$\hat{\Omega}(f) = \int d^2x f(x)\hat{\Delta}(x) \quad (3.5.16)$$

Possiamo scrivere l'azione esplicita dell'operatore $\hat{\Delta}(x)$ nella rappresentazione di Schroedinger associata alle regole di commutazione canoniche. Si ha infatti che¹¹

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}(x^1, x^2)f(q) &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-i(k_1 x^1 + k_2 x^2)} e^{i(k_1 \hat{x}^1 + k_2 \hat{x}^2)} f(q) \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-i(k_1 x^1 + k_2 x^2)} e^{ik_1 \hat{x}^1} e^{ik_2 \hat{x}^2} f(q) e^{i\frac{k_1 k_2}{2}} \\ &= \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-i(k_1 x^1 + k_2 x^2)} e^{ik_1(q+k_2)} f(q+k_2) e^{i\frac{k_1 k_2}{2}} \\ &= \int \frac{dk_2}{2\pi} e^{-ik_2 x^2} f(q+k_2) \int \frac{dk_1}{2\pi} e^{ik_1(q-x_1 + \frac{k_2}{2})} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{i2x^2(q-x^1)} f(2x^1 - q) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula di Baker-Hausdorff-Campbell per separare l'esponenziale di operatori, la rappresentazione integrale della distribuzione di Dirac, e il fatto che in rappresentazione di Schroedinger \hat{x}^1 agisce moltiplicativamente, e che \hat{x}^2 è il generatore delle traslazioni nella variabile q . Si può

¹⁰Nel riscrivere tale espressione abbiamo usato che esiste sempre l'antitrasformata di Fourier per funzioni di $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^2)$.

¹¹Abbiamo incorporato il fattore θ in \hat{x}^1 e \hat{x}^2 .

3.5. Il Piano Noncommutativo.

provare, a questo punto, che l'operatore sopra definito gode delle proprietà del quantizzatore, e inoltre che verifica per costruzione stessa

$$\hat{W}(v)\hat{\Delta}(x)\hat{W}^\dagger(v) = \hat{\Delta}(x+v), \quad \forall x \in X, \forall v \in \mathcal{T}^2 \quad (3.5.17)$$

dove $W(v)$ è un sistema di Weyl, che, come abbiamo accennato nelle precedenti sezioni, rappresenta unitariamente e proiettivamente le traslazioni bidimensionali su \mathcal{H} . Nel linguaggio appena introdotto, diremo che $\hat{\Delta}(x)$ ¹² è un quantizzatore equivariante per l'azione di \mathcal{T}^2 su X . La strategia consiste, a questo punto, nell'utilizzare la mappa di Weyl e la forma esplicita del quantizzatore per introdurre un nuovo prodotto su $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^2)$ espresso mediante una formula integrale, ottenuto dal prodotto di operatori. Richiedendo infatti che

$$\hat{\Omega}(f)\hat{\Omega}(g) = \hat{\Omega}(f \star g) \quad (3.5.18)$$

e calcolando esplicitamente il primo membro si ha che

$$(f \star g)(x) = \iint \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{d^2k'}{(2\pi)^2} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k'-k)e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij}k_i k'_j} e^{ik'_i x^i} \quad (3.5.19)$$

Vogliamo soffermarci un attimo sull'espressione precedente. Notiamo che il prodotto \star è rappresentato in forma chiusa e che, per $\theta \rightarrow 0$, si ha l'anti-trasformata di un prodotto di convoluzione fra le trasformate di Fourier di f e g , e quindi l'usuale prodotto puntuale tra $f(x)$ e $g(x)$. Inoltre esso non solo è associativo, ma è anche interno ad $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^2)$, ed è compatibile con la coniugazione di funzioni¹³: in altre parole, la coppia $\mathcal{A}_\theta \equiv (\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^2), \star)$ è una *-algebra non unitale. Su \mathcal{A}_θ , però, è possibile costruire un'azione del gruppo delle traslazioni bidimensionali mediante *-automorfismi: ricordando che la mappa di Wigner inverte la mappa di Weyl si ha

$$\tilde{g} : f(x) \rightarrow (\tilde{g} \cdot f)(x) \equiv \text{Tr} \hat{W}(g)\hat{\Omega}(f)\hat{W}^\dagger(g)\hat{\Delta}(x) \quad (3.5.20)$$

$\forall g \in \mathcal{T}^2, \forall f \in \mathcal{A}_\theta, \forall x \in X$. Utilizzando la ciclicità della traccia, l'autogiuentezza di $\hat{\Delta}(x)$ e la sua equivarianza rispetto a \mathcal{T}^2 , si ottiene che

$$(\tilde{g} \cdot f)(x) = f(g \cdot x) \quad (3.5.21)$$

L'azione così costruita è l'azione canonica sull'algebra delle funzioni definite su uno spazio omogeneo. In questo caso, però, viene preservata non solo la

¹²Tale quantizzatore è noto in letteratura come *quantizzatore di Weyl-Stratonovich*.

¹³Per provarlo basti ricordare che $\tilde{f}(k) = \tilde{f}(-k)$.

3.5. Il Piano Noncommutativo.

struttura di spazio vettoriale di \mathcal{A}_θ , ma anche il prodotto algebrico. Infatti, usando la definizione stessa del prodotto deformato si ha

$$\begin{aligned}
 (\tilde{g} \cdot (f \star h))(x) &= \text{Tr} \hat{W}(g) \hat{\Omega}(f \star h) \hat{W}^\dagger(g) \hat{\Delta}(x) \\
 &= \text{Tr} \hat{W}(g) \hat{\Omega}(f) \hat{\Omega}(h) \hat{W}^\dagger(g) \hat{\Delta}(x) \\
 &= \text{Tr} \hat{W}(g) \hat{\Omega}(f) \hat{W}^\dagger(g) \hat{W}(g) \hat{\Omega}(h) \hat{W}^\dagger(g) \hat{\Delta}(x) \\
 &= (\tilde{g} \cdot f \star \tilde{g} \cdot h)(x)
 \end{aligned}$$

$\forall f, h \in \mathcal{A}_\theta, \forall g \in \mathcal{T}^2, \forall x \in X$. Resta ora da mostrare come inserire in questo contesto le informazioni topologiche su \mathcal{A}_θ , e soprattutto come recuperare alcuni osservabili quantistici quali operatori posizione ed impulso. È chiaro, infatti, che usando tale formalismo non si possono “quantizzare” le funzioni coordinate su X , in quanto quest’ultime non appartengono sicuramente ad $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^2)$. A questo proposito, è interessante notare che il prodotto \star può essere esteso ad una classe più vasta di funzioni mediante l’introduzione del duale di $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^2)$, lo spazio delle distribuzioni temperate $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^2)$. Più precisamente, $\forall T \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^2)$, e $\forall f, g \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^2)$, si può definire una nuova distribuzione temperata come

$$\langle T \star f, g \rangle \equiv \langle T, f \star g \rangle \quad (3.5.22)$$

e anche

$$\langle f \star T, g \rangle \equiv \langle T, g \star f \rangle \quad (3.5.23)$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica la valutazione su di una particolare funzione. A questo punto si possono introdurre due spazi

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_L^\theta &\equiv \{T \in \mathcal{S}'_\infty : T \star f \in \mathcal{S}_\infty, \forall f \in \mathcal{S}_\infty\} \\
 \mathcal{M}_R^\theta &\equiv \{T \in \mathcal{S}'_\infty : f \star T \in \mathcal{S}_\infty, \forall f \in \mathcal{S}_\infty\}
 \end{aligned}$$

e la loro intersezione $\mathcal{M}^\theta \equiv \mathcal{M}_L^\theta \cap \mathcal{M}_R^\theta$. È possibile estendere il prodotto deformato ad \mathcal{M}^θ , che viene chiamata *algebra di Moyal*: dato che ad ogni elemento di \mathcal{S}_∞ si può associare una distribuzione temperata regolare, si ha l’inclusione canonica $\mathcal{A}_\theta \subset \mathcal{M}^\theta$. Il nostro interesse per tale algebra è che essa contiene le funzioni coordinate, le costanti, la distribuzione di Dirac e altre funzioni che hanno rilevanza per la fisica, quali ad esempio le onde piane $e^{ik \cdot x}$. La mappa di Weyl rispetta il prodotto su \mathcal{M}^θ , permettendo così di riottenere le regole di commutazione tra posizione e momento in termini di operatori non limitati su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ nella rappresentazione di Schroedinger.

La studio della “topologia” di \mathcal{A}_θ è un pò più delicato e qui accenneremo solo brevemente qualche risultato. La \ast -algebra \mathcal{A}_θ , infatti, non è una C^\ast -algebra, ma una algebra di Frechet: ciò è dovuto al fatto che abbiamo definito il

3.5. Il Piano Noncommutativo.

prodotto deformato su \mathcal{S}_∞ , utilizzando cosí la struttura differenziabile del piano commutativo. Bisogna cercare una C^* -algebra, possibilmente unitale per l'applicazione alla meccanica quantistica, in cui \mathcal{A}_θ sia immersa in maniera iniettiva: \mathcal{M}^θ non fà al caso nostro, in quanto non è una C^* -algebra¹⁴. Se si considera la seguente $*$ -algebra

$$A_\theta \equiv \{T \in \mathcal{S}' : T \star g \in L^2(\mathbb{R}^2), \forall g \in L^2(\mathbb{R}^2)\} \quad (3.5.24)$$

munita della norma operatoriale

$$\|T\|_{\text{op}} \equiv \sup \left\{ \frac{\|T \star g\|}{\|g\|} : g \neq 0 \in L^2(\mathbb{R}^2) \right\} \quad (3.5.25)$$

si dimostra che la coppia $(A_\theta, \|\cdot\|_{\text{op}})$ è una C^* -algebra unitale realizzata in termini di operatori su $L^2(\mathbb{R}^2)$: per lo stesso motivo di cui sopra, \mathcal{A}_θ è inclusa anche in A_θ , ma non densamente. Per ulteriori dettagli si rimanda a [GGBI⁺04]. Prima di passare ad un'applicazione alla fisica di una particella carica posta in presenza di un campo magnetico, vogliamo concludere questa sezione accennando che è possibile formalizzare in maniera precisa e rigorosa il limite per $\theta \rightarrow 0$, facendo utilizzo di *campi continui* di C^* -algebre, ed inquadrando il piano di Moyal qui proposto in quelle che alcuni autori chiamano *strette deformazioni*. A tale proposito, rimandiamo il lettore a [Rie89].

Osservazione¹⁵. *Quando abbiamo introdotto il quantizzatore di Weyl, abbiamo richiesto che le relazioni (3.5.11) fossero verificate “in senso distribuzionale”. Infatti, in generale, gli operatori di quantizzazione non sono di classe traccia, a differenza di quanto si legge talvolta in letteratura . A riprova di ciò proponiamo il seguente esempio. Si consideri il caso in cui $X = T^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^2$: l'azione del quantizzatore per X sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ è data esplicitamente da [GBVF00]:*

$$\left(\hat{\Delta}(q, p) f \right) (x) = 2e^{\frac{2i}{\hbar} p(x-q)} f(2q - x)$$

per qualsiasi $f \in \mathcal{H}$. Ora, utilizzando l'equivarianza del quantizzatore col sistema di Weyl che rappresenta unitariamente \mathbb{R}^2 su \mathcal{H} , cioè la relazione (3.5.17), ed una nota proprietà degli operatori di classe traccia si ha che

$$\text{Tr}(\hat{\Delta}(z)) = \text{Tr}(W(u)\hat{\Delta}(z)W^\dagger(u)) = \text{Tr}(\hat{\Delta}(z + u)) \quad (3.5.26)$$

¹⁴Se \mathcal{M}_θ fosse una C^* -algebra, sarebbe possibile rappresentare con operatori limitati le regole di commutazione canoniche.

¹⁵Tale osservazione è frutto di una comunicazione privata con J.C. Varilly, che ringraziamo caldamente.

3.6. Campi Magnetici e Geometria Noncommutativa.

$\forall z \in X, \forall u \in \mathbb{R}^2$. È chiaro che la traccia del quantizzatore non può dipendere da $z = (q, p)$, quindi la si può calcolare per il quantizzatore valutato in un qualsiasi punto di X . Si consideri allora $\hat{\Delta}(0, 0)$, che è proporzionale all'operatore di riflessione $f(x) \mapsto f(-x)$. Ora, se si sceglie una base ortonormale di \mathcal{H} costituita da funzioni di Hermite $H_n(x)$, che hanno la proprietà che $H_n(x) = (-1)^n H_n(-x)$, si ha che il calcolo della traccia in tale base è

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\hat{\Delta}(0, 0)) &= \sum_n (H_n, \hat{\Delta}(0, 0) H_n) \\ &= 2 \sum_n (-1)^n \end{aligned}$$

La serie alternata al secondo membro non è certamente convergente. Tuttavia, da un punto di vista pratico le tracce distribuzionali si possono calcolare sostituendo alla convergenza ordinaria la convergenza nel senso di Cesaro¹⁶: utilizzando tale accorgimento si può mostrare che la serie alternata converge a $\frac{1}{2}$, e quindi che la traccia del quantizzatore è 1.

3.6 Campi Magnetici e Geometria Noncommutativa.

In questa sezione ci riproponiamo di mostrare come il piano non commutativo emerge in maniera naturale nella descrizione di un sistema quantistico relativamente semplice. Si consideri una particella di carica e e di massa m sottoposta ad un campo elettromagnetico costante di potenziale vettore $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ e potenziale scalare $\phi(\mathbf{q})$. Tale sistema può essere descritto mediante la seguente lagrangiana

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \frac{e}{c} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \phi(\mathbf{q})) \quad (3.6.1)$$

con (\mathbf{q}, \mathbf{v}) un sistema di coordinate globali su $\mathbb{T}\mathbb{R}^3$. Introducendo il momento coniugato

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \equiv \mathbf{p} \quad (3.6.2)$$

dove si è un pò fatto abuso di notazione, e indicando con $\boldsymbol{\pi}$ il momento cinetico, abbiamo che l'hamiltoniana del sistema è

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i q^i - \mathcal{L} = \frac{(\boldsymbol{\pi})^2}{2m} \quad (3.6.3)$$

¹⁶Una serie $\sum_n a_n$ è detta convergere "nel senso di Cesaro" se esiste il limite $\lim_n S'_n$, dove $S'_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n}$ e $S_n = \sum_i^n a_i$.

3.6. Campi Magnetici e Geometria Noncommutativa.

Osserviamo che in presenza di campo elettromagnetico il momento cinetico ed il momento coniugato di una particella carica non coincidono, ed inoltre che solo il momento cinetico è fisicamente rilevante, in quanto gauge invariante. Quantizzando il sistema canonicamente, si ha che il commutatore formale tra gli operatori corrispondenti alle componenti del momento cinetico è

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] &= [\hat{p}_i + \frac{e}{c}\hat{A}_i, \hat{p}_j + \frac{e}{c}\hat{A}_j] \\ &= -i\frac{e\hbar}{c}\frac{\partial\hat{A}_j}{\partial q^i} + i\frac{e\hbar}{c}\frac{\partial\hat{A}_i}{\partial q^j} \\ &= i\frac{e\hbar}{c}\epsilon_{jik}B_k \end{aligned}$$

dove $i, j, k = 1, 2, 3$. Si ha così che il sistema non solo non può essere descritto in termini di spazio delle fasi classico, ma anche che lo *spazio dei momenti* perde di significato. Se scegliamo l'asse z nella direzione del campo magnetico di modulo B , abbiamo

$$\begin{aligned} [\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] &= i\theta_{ij}\mathbb{I} \\ [\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_3] &= 0 \end{aligned}$$

con $ij=12$, e $\theta_{ij} = \frac{e\hbar}{c}B\epsilon_{ji}$: *i momenti cinetici nella direzione x e y "vivono" in un piano noncommutativo*. Se operiamo la seguente scelta di gauge in presenza di campo magnetico costante

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \left(-\frac{eB}{c}y, \frac{eB}{c}x, 0\right) \quad (3.6.4)$$

possiamo esprimere l'operatore hamiltoniano spaziale come

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{p}_x - \frac{eB}{2c}\hat{y} \right)^2 + \left(\hat{p}_y + \frac{eB}{2c}\hat{x} \right)^2 \right] + \frac{1}{2m}\hat{p}_z^2 \\ &= \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \end{aligned}$$

Poichè $[\hat{H}_1, \hat{H}_2] = 0$ ci concentremo solo su \hat{H}_1 , che a questo punto assumiamo descrivere la fisica di un elettrone non relativistico vincolato sul piano xy in presenza di campo magnetico ortogonale al piano stesso.

Lo spettro di \hat{H}_1 si può ottenere formalmente in maniera puramente algebrica. Introduciamo a tale proposito i seguenti operatori

$$\hat{b}_1 = \hat{p}_x + \frac{\Omega}{2}\hat{y}, \quad \hat{b}_2 = \hat{p}_y - \frac{\Omega}{2}\hat{x} \quad (3.6.5)$$

3.6. Campi Magnetici e Geometria Noncommutativa.

dove $\Omega = \frac{eB}{c}$. È facile verificare che \hat{b}_1 e \hat{b}_2 soddisfano

$$[\hat{b}_1, \hat{b}_2] = i\hbar\Omega\mathbb{I} \quad (3.6.6)$$

Costruiamo a questo punto le seguenti combinazioni lineari

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega\hbar}} (\hat{\pi}_1 - i\hat{\pi}_2), & \hat{A}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega\hbar}} (\hat{\pi}_1 + i\hat{\pi}_2) \\ \hat{F} &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega\hbar}} (\hat{b}_1 + i\hat{b}_2), & \hat{F}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\Omega\hbar}} (\hat{b}_1 + i\hat{b}_2) \end{aligned}$$

Per costruzione essi verificano

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = [\hat{F}, \hat{F}^\dagger] = \mathbb{I} \quad (3.6.7)$$

e che

$$\hat{H}_1 = \frac{\hbar\Omega}{2m} (\hat{A}\hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger\hat{A}) \quad (3.6.8)$$

È immediato riconoscere che \hat{H}_1 è l'hamiltoniano di un oscillatore armonico quantistico di frequenza $\omega_c = \frac{eB}{mc}$, che corrisponde alla frequenza di ciclotrone del moto dell'elettrone classico in un campo magnetico. Di conseguenza lo spettro puntuale di \hat{H}_1 sarà dato da

$$E_n = \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

con spaziatura dei livelli costante

$$\Delta E_n = \frac{\hbar\omega_c}{2} \quad (3.6.9)$$

Tali livelli prendono il nome di *livelli di Landau*. È noto che tali livelli sono infinitamente degeneri: la prova usuale è data risolvendo il problema nella rappresentazione di Schroedinger, e mostrando che lo spettro non dipende da una componente del momento coniugato. Tale caratteristica, com'è ovvio, si ritrova nell'approccio algebrico qui proposto. Si può mostrare [EMS04], infatti, che gli operatori \hat{F} e \hat{F}^\dagger prima introdotti verificano

$$[\hat{F}, \hat{H}_1] = [\hat{F}^\dagger, \hat{H}_1] = 0 \quad (3.6.10)$$

Ciò implica che essi lasciano invariati gli autospazi \mathcal{H}_n corrispondenti agli autovalori di \hat{H}_1 , che saranno quindi sede di una rappresentazione irriducibile delle regole di commutazione $[\hat{F}, \hat{F}^\dagger] = \mathbb{I}$. Per il teorema di Wintner, quindi, \mathcal{H}_n è necessariamente infinito dimensionale.

3.6. Campi Magnetici e Geometria Noncommutativa.

Un caso interessante in cui si manifesta la noncommutatività dello *spazio delle coordinate* si ha quando l'intensità del campo magnetico B è molto elevata. Se $B \gg m$, si ha che la lagrangiana dell'elettrone sul piano diventa, quando valutata sui moti effettivi,

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{eB}{c}xy \quad (3.6.11)$$

dove si è fatto uso della gauge di Landau $\mathbf{A} = (0, Bx)$. La lagrangiana ridotta è della forma $p\dot{q}$, e quindi la coppia $(-\frac{eB}{c}x, y)$ costituisce un sistema di coordinate canoniche, con

$$[\hat{x}, \hat{y}] = -i\frac{\hbar c}{eB} \quad (3.6.12)$$

dopo aver quantizzato canonicamente il sistema. Lo stesso risultato può essere ottenuto nel formalismo hamiltoniano, notando che la condizione sull'intensità del campo magnetico introduce il vincolo $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{0}$. Poichè le parentesi di Poisson tra le componenti di $\boldsymbol{\pi}$ sono diverse da zero, per procedere nel formalismo canonico dobbiamo introdurre le parentesi di Dirac, che restituiscono le regole di commutazione precedenti dopo quantizzazione. Abbiamo ottenuto così che la presenza di un intenso campo magnetico riduce la dinamica del sistema ad una sottovarietà bidimensionale dello spazio delle fasi quadridimensionale che coincide con lo spazio delle configurazioni, non più commutativo alle scale quantistiche. Osserviamo, a questo punto, che la spaziatura dei livelli di Landau dipende dal rapporto $\frac{B}{m}$. Nel regime in cui $B \gg m$, i vari livelli sono fortemente separati, ed in particolare lo stato di minima energia si può ritenere disaccoppiato dagli altri: ciò porta alla conclusione che la noncommutatività dello spazio delle posizioni è presente nei sistemi vincolati al livello di Landau più basso.

Consideriamo ora il caso in cui l'elettrone non sia libero, ma sottoposto ad un potenziale esterno $V(x, y)$ periodico, cioè tale che $V(x+a, y) = V(x, y+b) = V(x, y)$, dove (a, b) definisce un reticolo bidimensionale sul piano $x-y$. Si possono definire, a questo punto, le *traslazioni magnetiche*, che, nella gauge di Landau, sono generati da

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_x &= p_x + \frac{e}{c}A_x - \frac{e}{c}By = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \\ \tilde{\pi}_y &= p_y + \frac{e}{c}A_y + \frac{e}{c}Bx = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} + \frac{e}{c}Bx \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

3.6. Campi Magnetici e Geometria Noncommutativa.

dove le eguaglianze ai secondi membri indicano la realizzazione sullo spazio delle funzioni a quadrato integrabile sul piano. È immediato mostrare che tali operatori commutano con gli operatori associati ai momenti cinetici π_i precedentemente definiti, e quindi commutano con l'hamiltoniano libero. La particolare forma delle equazioni (3.6.13) è dovuta al fatto che, in presenza di un campo magnetico esterno B , l'hamiltoniano H è invariante soltanto sotto un'opportuna combinazione di traslazioni dello spazio fisico e trasformazioni di gauge. Essendo il potenziale $V(x, y)$ periodico, si ha che le simmetrie traslazionali del sistema sono le sole traslazioni lungo il reticolo elementare (a, b) *finite*, cioè

$$\begin{aligned} S_a &= e^{\left[\frac{i}{\hbar} a \pi_x\right]} \\ S_b &= e^{\left[\frac{i}{\hbar} b \pi_y\right]} \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

che verificano

$$[S_a, H] = [S_b, H] = 0.$$

Indicato con $\vec{a} = (a_1, a_2)$ il generico vettore di traslazione, si può mostrare che l'operatore di traslazione magnetica è realizzato su $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2)$ come

$$(T(\vec{a})\psi)(\vec{r}) = e^{\left(\frac{ie}{c\hbar} B a_1 (y - \frac{a_2}{2})\right)} \psi(\vec{r} + \vec{a}) \quad (3.6.15)$$

Utilizzando tale realizzazione si mostra che

$$T(\vec{a})T(\vec{b}) = e^{\left(-\frac{i\pi e}{c\hbar} \vec{B} \cdot \vec{a} \times \vec{b}\right)} T(\vec{a} + \vec{b}) \quad (3.6.16)$$

e

$$T(\vec{a})T(\vec{b}) = T(\vec{b})T(\vec{a}) e^{\left(-\frac{2\pi i e}{\hbar c} \vec{B} \cdot \vec{a} \times \vec{b}\right)} \quad (3.6.17)$$

L'equazione (3.6.16) mostra che attraverso gli operatori di traslazione magnetica il gruppo delle traslazioni è rappresentato proiettivamente sullo spazio di Hilbert delle funzioni d'onda. L'equazione (3.6.17) mostra che la realizzazione è comunque non commutativa: l'argomento dell'esponenziale può essere riscritto come $-4\pi i \frac{\Phi(\vec{a}, \vec{b})}{\Phi_0}$, dove $\Phi(\vec{a}, \vec{b})$ è il flusso di B attraverso il triangolo orientato limitato da \vec{a} , \vec{b} , e $-(\vec{a} + \vec{b})$, mentre $\Phi_0 = \frac{\hbar}{ec}$ è detto *flusso elementare*. Nel caso del reticolo rettangolare (a, b) , utilizzando l'equazione (3.6.17) si ha che

$$T(a\hat{x})T(b\hat{y}) = T(b\hat{y})T(a\hat{x}) e^{-2\pi i \frac{\Phi}{\Phi_0}} \quad (3.6.18)$$

3.7. Il Toro Noncommutativo.

dove \hat{x}, \hat{y} sono rispettivamente i versori della direzione x e y , mentre $\Phi = Bab$ è il flusso magnetico totale che attraversa la cella elementare. Affinché i due operatori precedenti commutino si deve avere che Φ è un multiplo *intero* del flusso elementare Φ_0 . Alle stesse considerazioni si giunge imponendo condizioni periodiche alle autofunzioni simultanee dell'hamiltoniano e degli operatori di traslazione. È facile mostrare, infatti, che la variazione totale in fase della funzione lungo la frontiera della cella elementare è proprio $\exp(2\pi i \frac{\Phi}{\Phi_0})$: la richiesta di monodromia della funzione d'onda impone, quindi, che il rapporto all'argomento dell'esponenziale precedente sia un intero.

Risulta chiaro dalla precedente analisi che la presenza di un campo magnetico “deforma” lo spazio fisico e le sue simmetrie creando “celle elementari”, attraverso le quali il flusso magnetico non può essere arbitrario. Per un'analisi approfondita di tale effetto si veda [CMMN93].

3.7 Il Toro Noncommutativo.

Il toro noncommutativo sorge in molte situazioni di interesse matematico e fisico, ed è probabilmente la varietà differenziabile noncommutativa della quale meglio si conoscono le caratteristiche, tale da essere considerato “l'oscillatore armonico” della Geometria Noncommutativa.¹⁷ Analogamente a quanto fatto per il piano, ne daremo qui una trattazione relativamente dettagliata, analizzando, dapprima la deformazione del toro commutativo, e rimandando a [Rie90] per ulteriori dettagli. Esiste, inoltre, una caratterizzazione che esalta maggiormente il legame con le rotazioni rigide di un angolo θ su di un cerchio: a tale proposito si veda [Rie81].

Indichiamo con $T^2 \simeq S \times S$ il toro bidimensionale infinitamente differenziabile, e con $C^\infty(T^2)$ l'usuale algebra delle funzioni infinitamente differenziabili a valori complessi definite su T^2 . Come abbiamo imparato all'inizio di questo capitolo, una parentesi di Poisson costante su T^2 sarà caratterizzata da una matrice antisimmetrica reale 2×2 , e quindi dall'usuale parametro reale positivo θ . Come nel caso del piano cerchiamo un nuovo prodotto su $C^\infty(T^2)$ tale che al primo ordine in θ la parentesi di Moyal coincida con la parentesi di Poisson. A tale proposito, utilizziamo la proprietà della trasformata di Fourier di assegnare ad un elemento di $C^\infty(T^2)$ un elemento di $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{Z}^2)$, funzioni di Schwartz su \mathbb{Z}^2 a valori complessi¹⁸. Consideriamo infatti l'espressione

$$\tilde{f}(p) = \int_{T^2} e^{-2\pi i x \cdot p} f(x) dx \quad (3.7.1)$$

¹⁷F.Lizzi, comunicazione privata.

¹⁸Ricordiamo che $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{Z}^2) \equiv \{a_{rs} \in \mathbb{C} : \sup_{r,s \in \mathbb{Z}} (1 + r^2 + s^2)^k |a_{rs}|^2 < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}\}$.

3.7. Il Toro Noncommutativo.

con $x = (x_1, x_2)$ sistema di coordinate sul toro. È facile mostrare, utilizzando che dx è una misura invariante sotto l'azione di \mathbb{T}^2 e le condizioni di periodicità di $f(x)$, che $p \in \mathbb{Z}^2$. È noto, inoltre, che la trasformata di Fourier converte il prodotto puntuale tra funzioni nel prodotto di convoluzione, cioè

$$\widetilde{\phi\psi}(p) = \sum_q \tilde{\phi}(q)\tilde{\psi}(p-q) \quad (3.7.2)$$

L'idea guida è quella di deformare opportunamente *questo* prodotto, e di trasportarlo poi su $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ con un'antitrasformata di Fourier. Introduciamo quindi il seguente prodotto su $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{Z}^2)$

$$\widetilde{\phi \star_\theta \psi}(p) = \sum_q \tilde{\phi}(q)\tilde{\psi}(p-q)e^{-i\pi\gamma(p,q)} \quad (3.7.3)$$

dove $\gamma(p, q) = \sum \theta_{ij}p_iq_j$, con $p, q \in \mathbb{Z}^2$. È immediato verificare che per $\theta = 0$ l'espressione precedente coincide con la (3.7.2). Possiamo definire su $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{Z}^2)$ un'involuzione non dipendente da θ proveniente dalla coniugazione su $C^\infty(\mathbb{T}^2)$, in modo che

$$\tilde{\phi}^*(p) = \overline{\tilde{\phi}(-p)} \quad (3.7.4)$$

ed una norma corrispondente alla norma operatoriale nella rappresentazione regolare di $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{Z}^2)$ su $\ell^2(\mathbb{Z}^2)$ mediante moltiplicazione. Esplicitamente

$$\|\tilde{\phi}\|_\theta = \left\{ \sup \frac{\|\tilde{\phi} \star_\theta g\|_2}{\|g\|_2}, \text{ con } 0 \neq g \in \ell^2(\mathbb{Z}^2) \right\} \quad (3.7.5)$$

Possiamo trasportare prodotto, involuzione e norma deformati su $C^\infty(\mathbb{T}^2)$ mediante l'antitrasformata di Fourier, ottenendo, dopo opportuno completamento, una famiglia di C^* -algebre ad un parametro, che indicheremo con $\overline{\mathcal{A}}_\theta$. È naturale a questo punto chiamare \mathcal{A}_θ *toro noncommutativo*, o meglio toro noncommutativo differenziabile, e $\overline{\mathcal{A}}_\theta$ toro noncommutativo topologico. È importante sottolineare, a questo punto, che la deformazione così costruita preserva l'azione di \mathcal{T}^2 : non ci soffermeremo sulla dimostrazione, che procede in maniera del tutto analoga a quella riportata nella sezione 3.5.

È possibile mostrare che l'algebra $\overline{\mathcal{A}}_\theta$ prima costruita è isomorfa all'algebra generata da due operatori unitari U e V che soddisfano

$$UV = e^{2\pi i\theta}VU, \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R} \quad (3.7.6)$$

e nella quale \mathcal{A}_θ è contenuta come quegli elementi della forma

$$f = \sum_{n,m} a_{nm}U^nV^m, \quad \text{con } a_{nm} \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{Z}^2) \quad (3.7.7)$$

3.7. Il Toro Noncommutativo.

Tale riscrittura permette di ottenere agevolmente alcuni isomorfismi tra le \mathcal{A}_θ al variare di θ . È immediato verificare che le relazioni (3.7.6) generano un'algebra commutativa se e soltanto se $\theta \in \mathbb{N}$: inoltre $\mathcal{A}_\theta \simeq \mathcal{A}_{\theta+n}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, in quanto per $\theta \rightarrow \theta+n$ le (3.7.6) restano invariate. Ciò ci permette di restringere la variabilità di θ all'intervallo $[0, 1]$ della retta reale. Inoltre se si considera l'automorfismo generato da

$$\sigma(U) \equiv V, \quad \sigma(V) \equiv U \tag{3.7.8}$$

e lo si applica alle relazioni (3.7.6) si ha che

$$UV = e^{2\pi i(1-\theta)} VU \tag{3.7.9}$$

e cioè che $\mathcal{A}_\theta \simeq \mathcal{A}_{1-\theta}$: possiamo restringere ancora θ all'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$. La struttura di \mathcal{A}_θ per θ razionale o irrazionale è abbastanza differente. Riportiamo a proposito l'enunciato di un teorema di cui diamo una dettagliata dimostrazione in appendice.

Teorema *Sia $\theta = \frac{p}{q}$, con p e $q > 0$ relativamente primi. Allora \mathcal{A}_θ è isomorfa a un'algebra di funzioni continue definite su T^2 a valori nell'algebra delle matrici $q \times q \mathbb{M}_q(\mathbb{C})$.*

Tale risultato è molto importante se si è interessati a teorie di campo sul toro, in quanto \mathcal{A}_θ costituisce un'algebra di campi vettoriali, e si può mostrare che l'intero p rappresenta una sorta di carica topologica.

Indipendentemente da θ esiste sull'algebra \mathcal{A}_θ una traccia naturale definita come

$$\tau(f) \equiv a_{00}, \quad \forall f \in \mathcal{A}_\theta \tag{3.7.10}$$

Si verifica agevolmente che $\tau(f^\dagger f) = \sum_{n,m} |a_{nm}|^2 \geq 0$, dove il segno di uguaglianza vale solo per $a = 0$, e che $\tau(\mathbb{I}) = 1$: inoltre τ è un mappa continua, e può essere estesa quindi a $\overline{\mathcal{A}_\theta}$. È facile mostrare che se due *-algebre sono isomorfe, i rispettivi proiettori sono in corrispondenza biunivoca: usando τ possiamo costruire un invariante per isomorfismi tra le algebre \mathcal{A}_θ , che consiste nell'immagine mediante la traccia dell'insieme dei proiettori. Tale immagine è un sottoinsieme di \mathbb{R} , in quanto è facile mostrare che $\tau(p)^2 > 0$ per qualsiasi proiettore p . Non è ovvio, comunque, che \mathcal{A}_θ abbia proiettori non banali: basta considerare $\mathcal{A}_0 \simeq C^\infty(T^2)$, che non ha proiettori non banali in quanto il toro è connesso. Riportiamo così in seguito l'enunciato di un teorema che mostra che la classificazione di \mathcal{A}_θ mediante proiettori è possibile.

Teorema *Se θ è un numero reale irrazionale, allora la traccia naturale su \mathcal{A}_θ mappa l'insieme dei proiettori di \mathcal{A}_θ su $(\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}) \cap [0, 1]$.*

3.7. Il Toro Noncommutativo.

Un semplice corollario del precedente teorema permette di affermare che per θ irrazionale tale che $0 < \theta < \frac{1}{2}$, le algebre \mathcal{A}_θ sono non isomorfe. Si supponga, infatti, che \mathcal{A}_θ e $\mathcal{A}_{\theta'}$ siano isomorfe. Per quanto detto precedentemente si ha che $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \theta'\mathbb{Z}$, per $\theta, \theta' \in (0, \frac{1}{2})$: esisteranno così $k, l, m, n \in \mathbb{Z}$ tali che $\theta = k + l\theta'$ e $\theta' = m + n\theta$. Sostituendo la seconda equazione nella prima si ha che $\theta = k + lm + ln\theta$, e quindi che $ln = 1$, che in \mathbb{Z} ha come soluzioni $l = n = \pm 1$. Si ha che $m = \theta' \mp \theta$, e quindi, poichè $0 < \theta + \theta' < 1$, si ottiene che $m = \theta' - \theta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Essendo m un intero, il risultato precedente implica $m = 0$ e quindi $\theta = \theta'$.

Sebbene per θ razionale e θ' irrazionale le algebre \mathcal{A}_θ non siano isomorfe, il discorso precedente non si può applicare al caso in cui entrambi i parametri siano razionali. Dalla dimostrazione data in appendice nel caso razionale, risulta evidente che $\mathcal{A}_{p/q}$ e $\mathcal{A}_{p'/q'}$ non possono essere isomorfe se $q \neq q'$: uno studio più approfondito mostra che l'isomorfismo sussiste se e soltanto se $p' = p$ e $q' = q$. In conclusione, ciò permette di affermare che per $\theta \in [0, \frac{1}{2}]$ le algebre \mathcal{A}_θ sono non isomorfe.

Accenniamo solo brevemente che la traccia definita in (3.7.10) può essere riguardata come un *integrale* sul toro noncommutativo. Nel caso $\theta = 0$, τ si riduce all'integrale di Lebesgue di funzioni infinitamente differenziabili sul toro commutativo

$$\tau(f) = a_{00} = \int_{\mathbb{T}^2} f(x) dx, \quad \forall f(x) \in C^\infty(\mathbb{T}^2) \quad (3.7.11)$$

essendo a_{00} , per costruzione, il termine costante dello sviluppo di $f(x)$ in serie di Fourier.

L'analisi del toro noncommutativo e della struttura dell'algebra \mathcal{A}_θ comporta predizioni sperimentali nello studio dell'effetto Hall quantistico: si può mostrare, infatti, che il parametro θ è direttamente collegato alla conduttività Hall σ_H . Per un'introduzione a tali tematiche si rimanda a [Mor89] e [CMMN93]; per una trattazione più matematica che utilizzi le tecniche precedentemente introdotte si veda [Con94].

Capitolo 4

C^* -algebre

Approssimativamente Finite

Questo capitolo è dedicato allo studio di una particolare classe di C^ -algebre, dette approssimativamente finite. Come vedremo, tali algebre sono più semplici da trattare in quanto gli elementi sono limiti di matrici, pur conservando interessanti proprietà geometriche. Esse ricoprono un ruolo importante, inoltre, nello studio di sistemi quantistici in approssimazione di reticolo, e nell'approccio algebrico alla teoria quantistica dei campi.*

Nel precedente capitolo abbiamo visto come lo studio delle proprietà di uno spazio noncommutativo può essere in generale molto complicato. La ricchezza delle caratteristiche matematiche di tali oggetti può renderne alle volte molto difficoltosa e ostica l'applicazione al mondo della fisica, che ha come uno degli obbiettivi quello di proporre risultati quantitativi da verificare sperimentalmente. Paradossalmente, è proprio la complessità delle strutture che definiscono uno spazio noncommutativo che lo rende versatile, tanto che nella moderna letteratura scientifica appare in diversi contesti, a volte molto distanti tra di loro. Un buon compromesso sembra essere dato dalle *algebre approssimativamente finite* che introduciamo nella prossima sezione: esse hanno infatti il vantaggio di presentare tutti gli attributi di altre algebre infinito-dimensionale, ma permettono l'utilizzo di molte tecniche e di molti risultati validi nel caso finito-dimensionale. Ad esempio, lo studio di tali algebre, come vedremo, viene fatto mediante l'utilizzo di diagrammi, ed inoltre ne esiste una completa classificazione. Per un'introduzione dettagliata si rimanda a [Bra72] ed a [Lan97].

4.1 Definizioni e Proprietà Elementari.

Una C^* -algebra infinito dimensionale \mathcal{A} si dirà *approssimavente finita* (AF nel seguito) se esiste una successione $\{\mathcal{A}_n\}$ di sotto- C^* -algebre finito-dimensionali

$$\mathcal{A}_0 \xrightarrow{I_0} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{I_1} \mathcal{A}_2 \cdots \xrightarrow{I_{n-1}} \mathcal{A}_n \xrightarrow{I_n} \cdots \quad (4.1.1)$$

tali che \mathcal{A} è la chiusura in norma di $\bigcup \mathcal{A}_n$, e dove le mappe I_n sono $*$ -morfismi iniettivi, ma non suriettivi. Come insieme, l'algebra \mathcal{A} si può realizzare mediante *successioni coerenti*, cioè

$$\mathcal{A} \simeq \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, a_n \in \mathcal{A}_n : \exists N_0, a_{n+1} = I_n(a_n), \forall n > N_0\} \quad (4.1.2)$$

e limiti di successioni coerenti. La norma di un elemento di \mathcal{A} si può riottenere come

$$\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_{\mathcal{A}_n} \quad (4.1.3)$$

in quanto, essendo le mappe I_n iniettive, le successioni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ saranno definitivamente decrescenti (i.e. $\|a_{n+1}\| \leq \|a_n\|$) e quindi convergenti. Tali proprietà sono molto importanti: assegnate, infatti, una successione di C^* -algebre *arbitrarie* $\{\mathcal{A}_n\}$ ed una successione di mappe $\{I_n\}$ che verificano la (4.1.2), è possibile *costruire* una C^* -algebra \mathcal{A} di cui le \mathcal{A}_n sono sotto- C^* -algebre tali che $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \cdots$, ed ogni elemento è approssimato in norma.

Senza perdere di generalità possiamo considerare le algebre \mathcal{A}_n unitali e le mappe I_n tali che $I_n(\mathbb{I}_{n-1}) = \mathbb{I}_n$. Diamo in seguito un esempio relativamente semplice, ma utile a fissare le idee.

Esempio 4.1 *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert separabile infinito dimensionale e si consideri la C^* -algebra \mathcal{A}*

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \mathbb{C}\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \quad (4.1.4)$$

dove $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ è la C^* -algebra degli operatori compatti, che ricordiamo non avere un'unità su \mathcal{H} . Mostriamo che \mathcal{A} è un'algebra AF. Consideriamo la successione di algebre

$$\mathcal{A}_n \equiv \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}, \quad \text{con } n > 0 \quad (4.1.5)$$

Per ogni n , $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$ in quanto le matrici $n \times n$ sono operatori compatti su \mathbb{C}^n . Si considerino inoltre le seguenti mappe

$$(\Lambda, \lambda) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{I_n} \left(\left(\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \right) \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \quad (4.1.6)$$

4.2. Algebre AF e Diagrammi di Bratteli.

Ogni elemento di \mathcal{A} si può approssimare coerentemente con elementi di \mathcal{A}_n . Per mostrare ciò consideriamo una base ortonormale $\{\xi_n\}$ di \mathcal{H} e sia \mathcal{H}_n il sottospazio generato dai primi n elementi. Indicando con \mathcal{P}_n il proiettore su \mathcal{H}_n , definiamo

$$\mathcal{A}_n \equiv \left\{ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \exists \lambda \in \mathbb{C} : \right. \\ \left. T(\mathbb{I} - \mathcal{P}_n) = (\mathbb{I} - \mathcal{P}_n)T = \lambda(\mathbb{I} - \mathcal{P}_n) \right\} \quad (4.1.7)$$

Si può mostrare agevolmente che $\mathcal{A}_n \simeq \mathcal{B}(\mathcal{H}_n) \oplus \mathbb{C}$, e che \mathcal{A}_n è immersa in \mathcal{A}_{n+1} secondo la (4.1.6). In altre parole, ogni elemento $T \in \mathcal{A}_n$ è la somma di un operatore di rango finito e di un multiplo dell'operatore identità. È noto che una successione decrescente in norma di operatori di rango finito converge ad un operatore compatto, e quindi si ha che $\overline{\bigcup_n \mathcal{A}_n} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \mathbb{C}\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$. Vale, inoltre, il viceversa: ogni operatore compatto può essere approssimato da operatori di rango finito ed il fatto che le combinazioni finite di vettori $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ sono dense in \mathcal{H} permette di affermare che $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \mathbb{C}\mathbb{I}_{\mathcal{H}} \subset \overline{\bigcup_n \mathcal{A}_n}$ concludendo la dimostrazione che \mathcal{A} è un'algebra AF. \square

È importante notare che determinare qual è l'algebra AF limite di una particolare successione $\{\mathcal{A}_n, I_n\}$ o quando due algebre AF sono isomorfe è una questione molto delicata. A tale proposito nella prossima sezione introdurremo uno strumento grafico, chiamato *diagramma di Bratteli*, che contiene tutte le informazioni inerenti ad un'algebra AF a cui è associato.

4.2 Algebre AF e Diagrammi di Bratteli.

In questa sezione daremo alcuni risultati interessanti sulle algebre AF, in modo da mostrare come sia possibile associare ad un'algebra \mathcal{A} un diagramma $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ che ne caratterizzi le proprietà.

Sia $\mathcal{A} = \overline{\bigcup_n \mathcal{A}_n}$ un'algebra AF. Una C^* -algebra \mathcal{B} si dirà *elementare* se essa è *-isomorfa ad una algebra di operatori compatti su di un qualche spazio di Hilbert. Si può dimostrare, a questo punto, che ogni algebra di operatori compatti si può decomporre in una somma diretta di algebre elementari. Poichè le sottoalgebre \mathcal{A}_n di \mathcal{A} sono finite dimensionalmente, esse sono algebre di matrici, e quindi di operatori compatti. Una semplice applicazione del teorema precedente comporta che

$$\mathcal{A}_n = \bigoplus_{k=1}^{k_n} M_{d_k^{(n)}}(\mathbb{C}), \quad k_n < \infty \quad (4.2.1)$$

4.2. Algebre AF e Diagrammi di Bratteli.

Tale riscrittura è molto utile per lo studio dei morfismi tra due algebre \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 della forma precedente. Diamo a tale proposito la seguente proposizione [Lan97].

Proposizione *Siano \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 due algebre di matrici della forma*

$$\mathcal{A}_1 \equiv \mathbb{M}_{p_1}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_{p_2}(\mathbb{C}), \quad \mathcal{A}_2 \equiv \mathbb{M}_{q_1}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_{q_2}(\mathbb{C}) \quad (4.2.2)$$

Ogni morfismo univale $\alpha : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ può essere scritto come la somma diretta di due rappresentazioni $\alpha_j : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{M}_{q_j}(\mathbb{C})$, $j = 1, 2$. Se indichiamo con π_{ji} l'unica rappresentazione irriducibile di $\mathbb{M}_{p_j}(\mathbb{C})$ su $\mathbb{M}_{q_i}(\mathbb{C})$, allora α_j si spezza nella somma diretta delle rappresentazioni π_{ji} con molteplicità $N_{ji} \in \mathbb{N}_0$.

La prova della proposizione precedente è costruttiva, e sostanzialmente afferma che, dopo un opportuno cambio di base, il morfismo α può sempre porsi nella forma

$$A \bigoplus B \rightarrow \underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{N_{11}} \oplus \underbrace{B \oplus \cdots \oplus B}_{N_{12}} \bigoplus \underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{N_{21}} \oplus \underbrace{B \oplus \cdots \oplus B}_{N_{22}} \quad (4.2.3)$$

con $A \oplus B \in \mathcal{A}_1$. Inoltre le dimensioni dei fattori sommandi (p_1, p_2) e (q_1, q_2) devono soddisfare

$$\begin{aligned} N_{11}p_1 + N_{12}p_2 &= q_1 \\ N_{21}p_1 + N_{22}p_2 &= q_2 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

A questo punto, data un'immersione univale di $\mathcal{A}_1 = \bigoplus_{j=1}^{n_1} \mathbb{M}_{d_j^{(1)}}(\mathbb{C})$ in $\mathcal{A}_2 = \bigoplus_{j=1}^{n_2} \mathbb{M}_{d_j^{(2)}}(\mathbb{C})$, la proposizione precedente permette di affermare che dopo una scelta opportuna di base in \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 si può identificare \mathcal{A}_1 con una subalgebra di \mathcal{A}_2 della forma

$$\mathcal{A}_1 \simeq \bigoplus_{k=1}^{n_2} \left(\bigoplus_{j=1}^{n_1} N_{kj} \mathbb{M}_{d_j^{(1)}}(\mathbb{C}) \right) \quad (4.2.5)$$

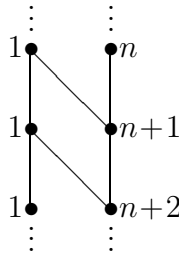
dove abbiamo usato la notazione $N_{kj} \mathbb{M}_{d_j^{(1)}}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{M}_{d_j^{(1)}}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{I}_{N_{kj}}$, e abbiamo identificato $\bigoplus_{j=1}^{n_1} N_{kj} \mathbb{M}_{d_j^{(1)}}(\mathbb{C})$ con una sottoalgebra di $\mathbb{M}_{d_k^{(2)}}(\mathbb{C})$. Inoltre per la (4.2.4) gli interi N_{kj} soddisfano

$$\sum_{j=1}^{n_1} N_{kj} d_j^{(1)} = d_k^{(2)} \quad (4.2.6)$$

Diremo che l'algebra $\mathbb{M}_{d_j^{(1)}}(\mathbb{C})$ è *parzialmente immersa* nell'algebra $\mathbb{M}_{d_k^{(2)}}(\mathbb{C})$ con *molteplicità* N_{kj} . Un maniera grafica per rappresentare le algebre \mathcal{A}_1 e

4.2. Algebre AF e Diagrammi di Bratteli.

\mathcal{A}_2 e l'immersione $\mathcal{A}_1 \hookrightarrow \mathcal{A}_2$ è mediante un diagramma, detto *diagramma di Bratteli* [Bra72]. Tale diagramma si costruisce a partire dalle dimensioni dei fattori $d_j^{(1)}$, $j = 1, \dots, n_1$ e $d_k^{(2)}$, $k = 1, \dots, n_2$, e dagli interi N_{kj} che descrivono le immersioni parziali. Si disegnano due righe orizzontali di vertici, quella superiore(inferiore) rappresentante $\mathcal{A}_1(\mathcal{A}_2)$. Il numero di vertici superiori(inferiori) è pari ad $n_1(n_2)$, e vicino ad ogni vertice si riportano le dimensioni $d_j^{(1)}(d_k^{(2)})$ delle matrici corrispondenti. L'immersione parziale di $\mathbb{M}_{d_j^{(1)}}(\mathbb{C})$ in $\mathbb{M}_{d_k^{(2)}}(\mathbb{C})$ con molteplicità $N_{kj} > 0$ è indicata da una freccia $\searrow^{N_{kj}}$ che collega il vertice j con il vertice k , dove $j = 1, \dots, n_1$ e $k = 1, \dots, n_2$. Per un'algebra AF tale procedura si applica ad ogni livello, ottenendo così un diagramma semiinfinito, indicato con $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Possiamo costruire il diagramma di Bratteli associato all'esempio discusso nella sezione precedente



dove abbiamo ommesso, com'è usale, la molteplicità 1 sulle frecce. È chiaro che il diagramma $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ dipende non solo da \mathcal{A} , ma anche dalla successione $\{\mathcal{A}_n\}$ delle algebre approssimanti e dalle immersioni relative. È naturale quindi chiedersi quale sia il rapporto tra i diagrammi di Bratteli associati a due algebre isomorfe: è possibile, a tale proposito, mostrare un algoritmo che permette di costruire, a partire da un dato diagramma di Bratteli, tutti i diagrammi che definiscono algebre AF isomorfe a quella di partenza. Sorge a questo punto un'altra domanda: il diagramma di Bratteli $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ realmente definisce l'algebra \mathcal{A} a meno di isomorfismo? La risposta è affermativa: non ci soffermeremo sulla prova, che procede in maniera costruttiva, fornendo uno *-isomorfismo tra le due algebre con lo stesso diagramma $\mathcal{D}(\mathcal{A})$.

È interessante invece capire quali debbano essere le caratteristiche di un grafo affinché sia il diagramma di Bratteli di una qualche algebra AF. A tale proposito, si consideri un insieme \mathcal{D} di coppie ordinate (n, k) , $k = 1, \dots, k_n$, $n \in \mathbb{N}$, con $k_0 = 1$, e una successione di relazioni $\{\searrow^p\}_{p \in \mathbb{N}}$ su \mathcal{D} che soddisfano le seguenti condizioni:

4.2. Algebre AF e Diagrammi di Bratteli.

- Se $(n, k), (m, q) \in \mathcal{D}$, e $m = n + 1$, allora esiste uno e un unico p (possibilmente zero) tale che $(n, k) \searrow^p (n + 1, q)$.
- Se $m \neq n + 1$ non esiste alcun intero che li relaziona.
- Se $(n, k) \in \mathcal{D}$, allora esiste $q \in \{1, \dots, q_{n+1}\}$ ed un intero $p > 0$ tale che $(n, k) \searrow^p (n + 1, q)$.
- Se $(n, k) \in \mathcal{D}$ e $n > 0$, allora esiste $q \in \{1, \dots, q_{n-1}\}$ ed un intero $p > 0$ tale che $(n - 1, q) \searrow^p (n, k)$.

È immediato verificare che un diagramma di Bratteli $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ di un'algebra AF verifica le condizioni precedenti. Viceversa, assegnato un insieme \mathcal{D} che verifica le condizioni precedenti, si può costruire una successione $\{\mathcal{A}_n\}$ di C^* -algebre finito dimensionali ed una successione $\{I_n\}$ di *-morfismi iniettivi tali che l'algebra limite¹ \mathcal{A} del sistema $\{\mathcal{A}_n, I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ha come diagramma di Bratteli \mathcal{D} . Infatti, si definiscano le algebre

$$\mathcal{A}_n \equiv \bigoplus_{k=1}^{k_n} \mathbb{M}_{d_k^{(n)}}(\mathbb{C}) \quad (4.2.7)$$

e i morfismi

$$\begin{aligned} I_n : \bigoplus_{j=1}^{j_n} \mathbb{M}_{d_j^{(n)}}(\mathbb{C}) &\rightarrow \bigoplus_{k=1}^{k_n} \mathbb{M}_{d_k^{(n+1)}}(\mathbb{C}) : \\ &: A_1 \oplus \dots \oplus A_{j_n} \rightarrow \left(\bigoplus_{j=1}^{j_n} N_{1j} A_j \right) \oplus \dots \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{j_n} N_{kj} A_j \right) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

dove N_{kj} sono gli interi tali che $(n, j) \searrow^{N_{kj}} (n + 1, k)$. Le dimensioni $d_k^{(n)}$ dei fattori $\mathbb{M}_{d_k^{(n)}}(\mathbb{C})$ non sono arbitrarie, ma soddisfano le relazioni

$$d_k^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{j_n} N_{kj} d_j^{(n)} \quad (4.2.9)$$

Nella prossima sezione vedremo come dal diagramma di Bratteli associato ad un'algebra AF è possibile ottenere anche informazioni sulla sua struttura algebrica, ovvero sui suoi ideali. In seguito mostreremo, inoltre, com'è possibile associare ad ogni algebra AF un particolare spazio topologico, che vedremo ricoprire un ruolo fondamentale nella teoria delle *approssimazioni reticolari noncommutative*.

¹L'algebra \mathcal{A} è detta *limite induttivo* del sistema induttivo $\{\mathcal{A}_n, I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

4.3 Struttura Algebrica di un'Algebra AF.

Gli ideali bilateri chiusi di un'algebra AF hanno un'interessante e utile caratteristica: si possono rappresentare come unione di ideali delle sottoalgebre approssimanti. Mostriamo a tale proposito la seguente proposizione [Bra72].

Proposizione *Sia \mathcal{A} una C^* -algebra AF e sia $\{\mathcal{A}_n\}$ una successione di algebre approssimanti. Ogni ideale bilatero chiuso \mathcal{J} di \mathcal{A} soddisfa*

$$\mathcal{J} = \overline{\mathcal{J} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \right)} \quad (4.3.1)$$

Dim. Poniamo $\mathcal{J}_n = \mathcal{J} \cap \mathcal{A}_n$: \mathcal{J}_n è quindi un ideale bilatero chiuso di \mathcal{A}_n . Mostriamo che $\overline{\bigcup_n \mathcal{J}_n} = \mathcal{J}$. L'inclusione $\overline{\bigcup_n \mathcal{J}_n} \subseteq \mathcal{J}$ è immediata, in quanto $\mathcal{J}_n \subseteq \mathcal{J}$ per ogni n . Per mostrare il viceversa, proviamo che $x \notin \overline{\bigcup_n \mathcal{J}_n}$ implica che $x \notin \mathcal{J}$. Sia $\rho: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{J}$ la mappa quoziente e sia $\{x_n\}$ convergente ad un elemento x tale che $x_n \in \mathcal{A}_n$. Poichè $x \notin \overline{\bigcup_n \mathcal{J}_n}$ si ha che $\exists \epsilon > 0$ tale che

$$\inf_{y \in \bigcup_n \mathcal{J}_n} \|x - y\| = \epsilon \quad (4.3.2)$$

Dato che $x_n \rightarrow x$, per definizione esiste un N tale che per ogni $n \geq N$ si ha che $\|x_n - y\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Per $n \geq N$ e $y \in \mathcal{J}_n$ si ha quindi che

$$\|x_n - y\| \geq \left| \|x_n - y\| - \|x - x_n\| \right| \geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} \quad (4.3.3)$$

Ristretta a \mathcal{A}_n , ρ è la mappa quoziente $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_n/\mathcal{J}_n$. Si ha così che per $n \geq N$

$$\|\rho(x_n)\| = \inf_{y \in \mathcal{J}_n} \|x_n - y\| \geq \frac{\epsilon}{2} \quad (4.3.4)$$

Essendo ρ una mappa continua e $x_n \rightarrow x$, si ha che $\rho(x_n) \rightarrow \rho(x)$, ed in particolare che $\|\rho(x)\| = \lim_n \|\rho(x_n)\|$. Tale successione non può convergere a zero per la (4.3.4), e quindi $x \notin \mathcal{J}$, in quanto per costruzione $\rho(x) = 0, \forall x \in \mathcal{J}$ \square .

Diamo l'enunciato di altre due proposizioni molto importanti, non soffermandoci sulla dimostrazione, che utilizza come nucleo centrale il risultato appena mostrato. Preferiamo, invece, applicare i seguenti teoremi all'esempio discusso nella sezione (4.1).

Proposizione *Sia $\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n}$ un'algebra AF con diagramma di Bratteli associato $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Sia \mathcal{I} un ideale di \mathcal{A} : allora \mathcal{I} ha la forma*

$$\mathcal{I} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{k; (n,k) \in \Lambda_{\mathcal{I}}} \mathbb{M}_{d_k^{(n)}}(\mathbb{C})} \quad (4.3.5)$$

4.3. Struttura Algebrica di un'Algebra AF.

dove $\Lambda_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ soddisfa le seguenti proprietà:

- a)** se $(n, k) \in \Lambda_{\mathcal{I}}$ e $(n, k) \searrow^p (n+1, j)$ per qualche $p > 0$, allora $(n+1, j) \in \Lambda_{\mathcal{I}}$;
- b)** se tutti i fattori $(n+1, j)$, $j = 1, \dots, n_{n+1}$, in cui (n, k) è parzialmente immersa appartengono a $\Lambda_{\mathcal{I}}$, allora (n, k) appartengono a $\Lambda_{\mathcal{I}}$.

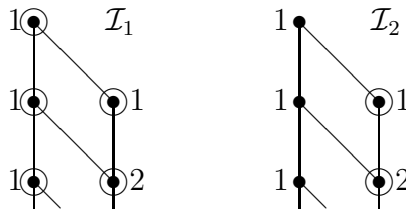
Viceversa, se $\Lambda \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ verifica le condizioni a) e b) di cui sopra, allora il sottinsieme \mathcal{I}_{Λ} definito dalla (4.3.5) è un ideale di \mathcal{A} .

Proposizione Sia $\mathcal{A} = \overline{\bigcup_n \mathcal{A}_n}$, sia \mathcal{I} un ideale di \mathcal{A} e sia $\Lambda_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ l'associato sottodiagramma. Le tre condizioni seguenti sono equivalenti:

- a)** l'ideale \mathcal{I} è primitivo.
- b)** non esistono due ideali \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 tali che $\mathcal{I}_1 \neq \mathcal{I} \neq \mathcal{I}_2$ e $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.
- c)** se $(n, k), (m, q) \notin \Lambda_{\mathcal{I}}$ allora esiste un intero $p \geq n, m$ e un elemento $(p, r) \notin \Lambda_{\mathcal{I}}$ tale che $\mathbb{M}_{d_k^{(n)}}(\mathbb{C})$ e $\mathbb{M}_{d_q^{(m)}}(\mathbb{C})$ sono parzialmente immerse in $\mathbb{M}_{d_r^{(p)}}(\mathbb{C})$.

La condizione **c)** si può riformulare dicendo che esistono due sequenze di punti nel diagramma $\mathcal{D}(\mathcal{A}) - \Lambda_{\mathcal{I}}$ che partono dagli elementi (n, k) e (m, q) e terminano in uno stesso elemento (p, r) .

Applichiamo i risultati precedenti all'esempio discusso in (4.1). Ricordando il diagramma di Bratteli dell'algebra $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \mathbb{C}\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ si ottiene



4.4. Topologia e Algebre AF.

dove abbiamo indicato con \circ gli elementi dei sottodiagrammi $\Lambda_{\mathcal{I}_1}$ e $\Lambda_{\mathcal{I}_2}$. Per i teoremi precedenti, gli ideali \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 sono gli unici ideali² di \mathcal{A} : \mathcal{I}_1 è l'ideale banale, coincidente con l'intera algebra, mentre \mathcal{I}_2 corrisponde all'ideale degli operatori compatti. Dal diagramma è semplice mostrare graficamente che non esistono altri ideali: ciò corrisponde al fatto che l'algebra degli operatori compatti è semplice. Inoltre \mathcal{I}_2 è anche un ideale primitivo, in quanto è il nucleo della rappresentazione irriducibile di \mathcal{A}

$$\pi_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) : a = (k + \lambda \mathbb{I}_{\mathcal{H}}) \rightarrow \pi_1(a) = a \quad (4.3.6)$$

La determinazione degli ideali di un algebra graficamente risulterà di fondamentale importanza, come vedremo nella prossima sezione, nell'associare ad algebre AF un particolare tipo di spazi topologici, e viceversa, dando così senso allo studio di tali oggetti nel quadro della Geometria Noncommutativa.

4.4 Topologia e Algebre AF.

L'insieme degli ideali primitivi di una C^* -algebra \mathcal{A} viene chiamato *spettro primitivo* e viene indicato, come abbiamo visto nel capitolo 1, con $Prim\mathcal{A}$. È possibile definire su $Prim\mathcal{A}$ una topologia “naturale”, che vogliamo discutere, data l'importanza, nella seguente sezione.

4.4.1 La Topologia di Jacobson.

La topologia su $Prim\mathcal{A}$ viene introdotta mediante un'operazione di chiusura (Si veda App.1). Dato un sottoinsieme W di $Prim\mathcal{A}$, possiamo definire come chiusura \overline{W} di W l'insieme di tutti gli elementi di $Prim\mathcal{A}$ che contengono l'intersezione degli ideali di \mathcal{A} che appartengono a W . Esplicitamente

$$\overline{W} \equiv \left\{ \mathcal{I} \in Prim\mathcal{A} : \bigcap_n \mathcal{I}_n \subseteq \mathcal{I}, \text{ con } \mathcal{I}_n \in W \right\} \quad (4.4.1)$$

È possibile mostrare che l'operazione di chiusura (4.4.1) soddisfa gli assiomi di Kuratowski, e definisce quindi una topologia su $Prim\mathcal{A}$, chiamata *topologia di Jacobson*. Tale topologia ha delle proprietà interessanti che enunciamo brevemente, in quanto utili nel seguito.

²Tale affermazione è imprecisa: dal diagramma di Bratteli non è possibile sapere se $\{0\}$ è un ideale, in quanto ad esso non è associato nessun sottodiagramma diverso dal vuoto. Inoltre, per definizione, $\{0\}$ è un ideale primitivo se e soltanto se l'algebra \mathcal{A} è *primitiva*: esiste un teorema, che non abbiamo ritenuto opportuno enunciare, che stabilisce le caratteristiche del diagramma di Bratteli di un algebra AF affinché essa sia primitiva.

Proposizione 1 *Lo spazio $\text{Prim}\mathcal{A}$ con la topologia di Jacobson è T_0 .³*

Proposizione 2 *Sia $\mathcal{I} \in \text{Prim}\mathcal{A}$. Allora il punto $\{\mathcal{I}\}$ è chiuso in $\text{Prim}\mathcal{A}$ se e soltanto se \mathcal{I} è massimale tra gli ideali primitivi.*

Proposizione 3 *Sia W un sottoinsieme di $\text{Prim}\mathcal{A}$. Allora W è chiuso se e soltanto se $\mathcal{I} \in W$ e $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ implica che $\mathcal{J} \in W$.*

L'ultima proposizione enunciata permette di definire la topologia di Jacobson mediante un ordinamento parziale su $\text{Prim}\mathcal{A}$, e viceversa. Ricordiamo che un *insieme parzialmente ordinato* (Poset nel seguito) è un insieme su cui è stata definita una relazione \preceq che sia riflessiva, transitiva, e che verifichi

$$x \preceq y, y \preceq x \Rightarrow x = y$$

Con una relazione di ordinamento è possibile costruire una topologia su P utilizzando come base di aperti in ogni punto gli insiemi definiti come

$$\Lambda(x) \equiv \{y \in P : y \preceq x\}, \quad \forall x \in P \quad (4.4.2)$$

Si mostra agevolmente che la topologia così introdotta è anch'essa T_0 . Inoltre, si può mostrare che un sottoinsieme di P è chiuso se e soltanto se per ogni $x \in W$ e $x \preceq y$ si ha che $y \in W$. A questo punto, ci si accorge velocemente che su $\text{Prim}\mathcal{A}$ è possibile introdurre un ordinamento tra gli ideali primitivi mediante inclusione, e cioè

$$\mathcal{I}_1 \preceq \mathcal{I}_2 \Leftrightarrow \mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2, \quad \forall \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \in \text{Prim}\mathcal{A} \quad (4.4.3)$$

Per quanto detto precedentemente e per la proposizione 3, i chiusi definiti dall'ordinamento parziale coincidono con i chiusi della topologia di Jacobson: le due topologie sono equivalenti. Ciò è molto importante, in quanto, come vedremo fra poco, i poset saranno collegati alle approssimazioni discrete *noncommutative* di uno spazio topologico.

4.4.2 Dagli Spazi Topologici alle Algebre AF.

Abbiamo mostrato nella precedente sezione che lo spettro primitivo di una C^* -algebra è uno spazio topologico, munito di una topologia che è possibile assegnare equivalentemente mediante un ordinamento parziale. È lecito quindi porsi la seguente domanda: quali caratteristiche topologiche deve possedere uno spazio S affinché sia omeomorfo allo spettro primitivo di una C^* -algebra? Bratteli ed Elliott hanno risposto a tale domanda in alcuni lavori

³Ricordiamo che uno spazio topologico è detto T_0 se per qualsiasi coppia di punti esiste un intorno aperto di uno dei due punti che non contiene l'altro.

4.4. Topologia e Algebre AF.

degli anni settanta [Bra74], [BE78] nel caso in cui l'algebra in questione sia AF. Lo schema proposto dagli autori è molto semplice: assegnato lo spazio topologico S si costruisce un grafo che codifica tutte le informazioni topologiche di S , si mostra in seguito che tale grafo soddisfa le proprietà di un diagramma di Bratteli e che è possibile mettere in corrispondenza i punti di S con i sottodiagrammi Λ della sezione 4.3.

Una prima osservazione, per quanto detto nella sezione precedente, è che la topologia di S non può essere del tutto arbitraria, ma deve poter essere assegnata mediante un ordinamento parziale. Mostriamo che ogni spazio topologico che sia T_0 e *finitario*⁴ produce un ordinamento parziale. Si consideri prima il caso in cui S sia costituito da un numero finito di punti⁵: la collezione degli aperti τ sarà quindi chiusa sotto un'arbitraria intersezione dei suoi elementi. Di conseguenza per ogni punto $x \in S$ esiste il *più piccolo intorno aperto* che lo contiene, definito come

$$\Lambda(x) \equiv \bigcap \{U \in \tau : x \in U\} \quad (4.4.4)$$

A questo punto è possibile introdurre una relazione \preceq su S definita come

$$x \preceq y \Leftrightarrow \Lambda(x) \subseteq \Lambda(y), \quad \forall x, y \in S \quad (4.4.5)$$

La relazione precedente può riformularsi come

$$x \preceq y \Leftrightarrow \text{ogni aperto che contiene } y \text{ contiene anche } x \quad (4.4.6)$$

Dalla definizione (4.4.5) è chiaro che la relazione \preceq è riflessiva e transitiva, cioè

$$\begin{aligned} x &\preceq x \\ x \preceq y, y \preceq z &\Rightarrow x \preceq z \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Inoltre, poichè S è T_0 per ogni coppia $x, y \in S$ esiste un aperto contenente x ma non y . Per la (4.4.6) si ha così che

$$x \preceq y, y \preceq x \Rightarrow x = y \quad (4.4.8)$$

La relazione \preceq è quindi effettivamente un relazione d'ordine, ma parziale in quanto per la (4.4.5) non tutte le coppie di S sono in relazione. È ovvio, a questo punto, che la topologia costruita con l'ordinamento \preceq mediante la

⁴Uno spazio topologico è detto *finitario* se ogni intorno di un punto qualsiasi x è intersecato da un numero finito di aperti della topologia.

⁵Tale condizione può essere rilassata richiedendo che la topologia su S sia chiusa sotto un'*arbitraria* intersezione dei suoi elementi.

4.4. Topologia e Algebre AF.

(4.4.2) è equivalente a quella di partenza.

Siamo pronti ora a mostrare la seguente proposizione, che avrà come prima richiesta, per quanto detto sopra, che la topologia su S sia almeno T_0 .

Proposizione *Sia S uno spazio topologico avente le seguenti proprietà:*

- lo spazio S è T_0 ;
- se $F \subset S$ è un insieme chiuso che non è l'unione di due sottoinsiemi propri chiusi, allora F è la chiusura di un insieme costituito da un solo punto;
- lo spazio S è secondo numerabile;
- se $\{F_n\}_n$ è una successione decrescente ($F_{n+1} \subset F_n$) di insiemi chiusi di S , allora $\bigcap_n F_n$ appartiene a $\{F_n\}_n$.

Allora esiste un'algebra AF \mathcal{A} tale che S è omeomorfo a $\text{Prim}\mathcal{A}$.

Dim. Come accennato precedentemente, la dimostrazione consiste nel costruire un diagramma di Bratteli, e di seguito l'algebra \mathcal{A} ad esso associato. Delineiamo schematicamente nel seguito i passi fondamentali:

- sia $\{K_0, K_1, \dots\}$ la collezione di tutti gli insiemi chiusi nel poset S , dove $K_0 = S$;
- si consideri la sottocollezione dei primi n chiusi $\mathcal{K}_n = \{K_0, K_1, \dots, K_n\}$ e sia \mathcal{K}'_n la più piccola collezione di chiusi contenente \mathcal{K}_n tale che l'intersezione e l'unione di due elementi in \mathcal{K}'_n sia ancora in \mathcal{K}'_n ;
- si consideri l'algebra degli insiemi generata da \mathcal{K}_n , cioè la collezione di insiemi ottenuta mediante unione e complementazione degli insiemi di \mathcal{K}_n . In tale algebra si scelgano gli insiemi più piccoli $\mathcal{Y}_n = \{Y_n(1), Y_n(2), \dots, Y_n(k_n)\}$: si mostra che tali insiemi formano una partizione di S ;
- sia $F_n(j)$ il più piccolo sottoinsieme di \mathcal{K}'_n contenente $Y_n(j)$, e si definisca $\mathcal{F}_n \equiv \{F_n(1), F_n(2), \dots, F_n(k)\}$.

4.5. Reticoli Noncommutativi.

- Per le assunzioni fatte su S si ha

$$Y_n(k) \subseteq F_n(k), \bigcup_k Y_n(k) = S, \bigcup_k F_n(k) = S \quad (4.4.9)$$

$$Y_n(k) = F_n(k) \setminus \bigcup_p \{F_n(p) : p \neq k \text{ e } F_n(p) \subseteq F_p(k)\} \quad (4.4.10)$$

$$F_n(k) = \bigcup_p \{F_{n+1}(p) : F_{n+1}(p) \subseteq F_n(k)\}; \quad (4.4.11)$$

se $F \subseteq S$ è chiuso, allora esiste un indice n tale che

$$F = \bigcup_p \{F_n(p) : F_n(p) \subseteq F\} \quad (4.4.12)$$

A questo punto, si definisce $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ come l'insieme delle coppie ordinate (n, k) , $k = 1, \dots, k_n, n = 0, 1, \dots$, con la relazione \searrow^m definita come

$$\begin{aligned} (n, p) \searrow^m (n+1, q), \text{ dove } m = 1 \text{ se} \\ Y_n(p) \cap F_{n+1}(q) \neq \{\emptyset\}, \\ \text{e } m = 0 \text{ altrimenti.} \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Si mostra agevolmente che $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ soddisfa le condizioni di pagina 58, e quindi che effettivamente è il diagramma di Bratteli di un'algebra \mathcal{A} . Notiamo che l'aver scelto nella (4.4.13) che k possa assumere soltanto i valori 0 e 1 non comporta una perdita di generalità, in quanto si può mostrare che data un'algebra AF è sempre possibile scegliere una successione di sottoalgebre approssimanti tali che la molteplicità delle immersioni parziali sia 0 o 1. La dimostrazione della proposizione precedente si conclude mostrando che esiste una biezione tra sottoinsiemi chiusi di S e ideali dell'algebra \mathcal{A} con diagramma di Bratteli $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, e quindi, per la proposizione 3 della sezione 4.4.1, tra chiusi di S e chiusi di $\text{Prim}\mathcal{A}$. Preferiamo non riportare tale parte della dimostrazione, che è relativamente articolata e non aggiunge informazioni in vista di un utilizzo pratico. Vogliamo invece discutere un'interessante applicazione delle tecniche e dei risultati finora ottenuti alla *discretizzazione* di spazi topologici.

4.5 Reticoli Noncommutativi.

Un teoria fisica è di solito modellizzata matematicamente assegnando una varietà \mathcal{M} munita di opportune strutture geometriche (spazio-tempo, spazio delle configurazioni-velocità, etc.) ed una dinamica su di essa, usualmente codificata da una lagrangiana o da un'hamiltoniana. La fisica ci insegna

che le caratteristiche topologiche di \mathcal{M} hanno una certa rilevanza, ed una intera letteratura scientifica si è sviluppata attorno al concetto di solitone, instantone, ed altri difetti topologici. D'altro canto, estrarre informazioni da una teoria fisica per verificarne predizioni e caratteristiche mediante metodi analitici è in generale molto complicato, se non impossibile. Tra i metodi attuali più utilizzati di approssimazione vi è quello di discretizzare la varietà di supporto, sostituendola con un *reticolo*. L'idea è quella di assegnare ad \mathcal{M} un insieme discreto di punti, chiamato per l'appunto reticolo, di studiare la dinamica della teoria su tale insieme, e di riportare *al continuo* i risultati ottenuti. Il reticolo di solito è costruito decomponendo cubicamente, se possibile, la varietà \mathcal{M} e assegnando all'insieme di punti ottenuti la topologia discreta. In generale tale topologia è incapace di preservare, ad ogni stadio di approssimazione, le informazioni sia locali che globali della varietà \mathcal{M} . Si perde, ad esempio, il gruppo di omotopia $\pi(M, x_0)$: il concetto di *winding number* diventa così inutile, e diventa impossibile studiare in maniera efficace la presenza di solitoni nella teoria. Inoltre, al limite del continuo le proprietà topologiche non triviali vengono recuperate⁶ soltanto se codificate nella dinamica (ad esempio mediante un'interazione "tra primi vicini"). Inoltre, la descrizione duale di un reticolo ordinario mediante funzioni continue conduce ad un'algebra finito dimensionale, riducendo quindi drasticamente la possibilità che la teoria di partenza approssimata sia geometricamente interessante.

Per questi motivi introduciamo nel seguito un metodo di approssimazione basato sulla topologia dello spazio approssimato, mostrando come il reticolo così ottenuto sia un poset, "chiudendo così il cerchio" con quanto detto nella sezione precedente. Chiariremo inoltre il perché dell'aggettivo noncommutativo, ed in che senso "l'algebra delle funzioni continue" su tali spazi sia noncommutativa. Per ulteriori dettagli rimandiamo ai lavori [BEL⁺96a], [BEL⁺96b]

4.5.1 Approssimazioni Topologiche

Sia \mathcal{M} uno spazio topologico continuo, e si consideri una collezione $\{O_\lambda\}$ di aperti di \mathcal{M} tale da essere un ricoprimento, cioè

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\lambda} O_{\lambda} \tag{4.5.1}$$

⁶Questa affermazione in verità è poco precisa. Si può mostrare, infatti, che il limite del continuo di reticoli di Hausdorff produce *sempre* uno *spazio di Cantor*, che contiene come sottospazio topologico lo spazio approssimato.

4.5. Reticoli Noncommutativi.

e tale da essere una topologia per \mathcal{M} . Tale schema di approssimazione prende evidentemente le mosse dal fatto che un esperimento non è mai così accurato da individuare un singolo evento, ovvero un punto di \mathcal{M} : è ragionevole quindi pensare di utilizzare insiemi aperti come “detectors”. A tale proposito, introduciamo tra i punti di \mathcal{M} una relazione \sim definita come

$$x \sim y \text{ se e soltanto se } x \in O_\lambda \Rightarrow y \in O_\lambda, \quad \forall O_\lambda \quad (4.5.2)$$

Abbiamo così reso due punti equivalenti se nessuno dei “detectors” riesce a risolverli. Si può facilmente mostrare che \sim è una relazione di equivalenza: l'insieme dei punti interessante da un punto di vista degli esperimenti sarà quindi lo spazio quoziente $P(\mathcal{M}) = \mathcal{M}/\sim$. Nel seguito, per semplicità, assumeremo \mathcal{M} compatto, il che ci permetterà di utilizzare un ricoprimento costituito da un numero finito di aperti: inoltre utilizzeremo la notazione $P_N(\mathcal{M})$ per indicare che il quoziente è costituito da N punti.

Lo spazio topologico $P_N(\mathcal{M})$ è munito della topologia quoziente. Tale topologia è definita come la topologia più fine tale che la proiezione $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/\sim$ sia continua e aperta: ciò significa semplicemente che un'insieme O di \mathcal{M}/\sim è aperto se e soltanto se $\pi^{-1}(O)$ è un aperto di \mathcal{M} . In tale topologia $P_N(\mathcal{M})$ non è uno spazio di Hausdorff: si mostra, però, che tale spazio è T_0 . Per quanto visto nella sezione precedente, esiste allora un ordinamento su $P_N(\mathcal{M})$ che ne riproduce la topologia. Anche la continuità di una funzione rispetto alla topologia si può riformulare in termini di ordinamento: una mappa $f : P \rightarrow Q$ tra due poset è continua se e soltanto se preserva l'ordinamento, e cioè se $\forall x, y \in P$ tali che $x \preceq_P y$ si ha che $f(x) \preceq_Q f(y)$.

Associato ad ogni poset vi è un diagramma, detto *diagramma di Hasse*, che permette di rappresentare graficamente la topologia del poset. Tale diagramma si costruisce riarrangiando i punti del poset su vari livelli, in modo che siano verificate le seguenti condizioni⁷ :

- se $x \prec y$, allora x è ad un livello più basso di y
- se $x \prec y$ e non esiste z tale che $x \prec z \prec y$, allora x è ad un livello immediatamente inferiore rispetto ad y ed i due punti sono collegati da una linea

Discutiamo ora un'esempio importante, con il quale vericheremo che l'approssimazione mediante poset non distrugge le informazioni topologiche: inoltre mostreremo esplicitamente come costruire il diagramma di Bratteli ad esso associato. Consideriamo il seguente ricoprimento del cerchio $S^{(1)}$

⁷Utilizziamo la notazione $x \prec y$ per indicare $x \preceq y$ e $x \neq y$.

4.5. Reticoli Noncommutativi.

parametrizzato con $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} O_1 &\equiv \left\{ \frac{11\pi}{6} < \theta < \frac{7\pi}{6} \right\} \\ O_2 &\equiv \left\{ \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6} \right\} \\ O_3 &\equiv \left\{ \frac{11\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6} \right\} \\ O_4 &\equiv \left\{ \frac{5\pi}{6} < \theta < \frac{7\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

dove le relazioni precedenti vanno intese modulo 2π . È facile verificare graficamente che tali insiemi effettivamente costituiscono un ricoprimento ed una topologia per il cerchio⁸. Quoziendo rispetto alla relazione \sim sopra definita otteniamo 4 punti x_i e la mappa π è data da:

$$\begin{aligned} O_3 &\rightarrow x_3, & O_1 \setminus [O_3 \cup O_4] &\rightarrow x_1, \\ O_4 &\rightarrow x_4, & O_2 \setminus [O_3 \cup O_4] &\rightarrow x_2 \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Osservando che

$$\begin{aligned} O_1 &= O_3 \cup O_4 \cup \{O_1 \setminus [O_3 \cup O_4]\} \\ O_2 &= O_3 \cup O_4 \cup \{O_2 \setminus [O_3 \cup O_4]\} \end{aligned}$$

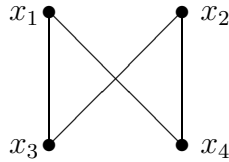
si ha che gli aperti della topologia di $P_4(\mathcal{M})$ sono

$$\{x_3\}, \{x_4\}, \{x_3, x_4, x_1\}, \{x_3, x_4, x_2\} \tag{4.5.4}$$

e le loro intersezioni ed unioni. Gli ordinamenti tra i punti di $P_4(\mathcal{M})$ saranno quindi

$$\begin{aligned} x_3 &\prec x_1; & x_3 &\prec x_2; \\ x_4 &\prec x_1; & x_4 &\prec x_2; \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

dove abbiamo ommesso le relazioni $x_j \preceq x_j$. Il corrispondente diagramma di Hasse sarà



⁸Ovviamente bisogna aggiungere l'insieme \emptyset e l'insieme S .

4.5. Reticoli Noncommutativi.

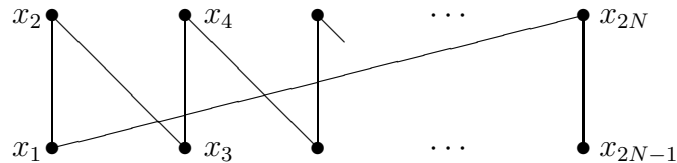
Nel linguaggio dei posets della sezione (4.4.1), il più piccolo aperto contenente un punto x_i è costituito da tutti i punti x_j che si incontrano a partire da x_i andando verso il basso e che sono collegati ad esso con una linea. È facile così mostrare che i punti più in alto nel diagramma precedente sono insiemi chiusi, mentre i punti più in basso sono insiemi aperti. Possiamo a questo punto illustrare uno dei vantaggi di questo metodo di approssimazione, ovvero come il gruppo fondamentale del cerchio $\pi(\mathcal{M}) \simeq \mathbb{Z}$ venga preservato con un reticolo di soli quattro punti. Si costruisca ad esempio la curva chiusa

$$\sigma(t) \equiv \begin{cases} x_1 & \text{se } t = 0 \\ x_4 & \text{se } 0 < t < \frac{1}{2} \\ x_2 & \text{se } t = \frac{1}{2} \\ x_3 & \text{se } \frac{1}{2} < t < 1 \\ x_1 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

Tale curva è per costruzione continua, in quanto punti chiusi (risp. aperti) di $P_4(\mathcal{M})$ sono antimmagine di sottoinsiemi chiusi (risp. aperti) dell'intervallo $[0, 1]$. È facile vedere graficamente che tale curva ha *winding number* (numero di avvolgimenti) 1: un'analisi un pò più accurata mostra che tale curva non è contraibile con continuità ad un punto del reticolo, e che tutte le curve contraibili sono del tipo

$$\sigma_0(t) \equiv \begin{cases} x_1 & \text{se } t = 0 \\ x_4 & \text{se } 0 < t < \frac{1}{2} \\ x_2 & \text{se } t = \frac{1}{2} \\ x_2 & \text{se } \frac{1}{2} < t < 1 \\ x_1 & \text{se } t = 1 \end{cases}$$

e cioè sono curve che non passano per tutti i punti di $P_4(\mathcal{M})$. La curva $\sigma(t)$ è un generatore di $\pi_1(P_4(\mathcal{M}))$, che può essere così identificato con \mathbb{Z} . In generale, se si ricopre il cerchio con $N \geq 4$ aperti O_n tali che $O_n \cap O_m \neq \emptyset$ se e soltanto se $m = n \pm 1$, si ha che il diagramma di Hasse associato al poset $P_{2N}(\mathcal{M})$ è



4.5. Reticoli Noncommutativi.

A questo punto, si verifica agevolmente che un poset costituito da un numero finito di punti verifica le ipotesi della proposizione in sezione (4.4.2), che ci permette così di costruire l'algebra AF associata.

Dalla (4.5.4) si ha che gli insiemi chiusi di $P_4(\mathcal{M})$ sono

$$\begin{aligned} K_0 &\equiv \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, K_1 \equiv \{x_1, x_2, x_4\}, K_2 \equiv \{x_1\}, K_3 \equiv \{x_2\}, \\ K_4 &\equiv \{x_1, x_2, x_4\}, K_5 \equiv \{x_1, x_2\} = K_1 \cup K_2 \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

dove abbiamo ommesso l'insieme vuoto. Consideriamo le seguenti collezioni \mathcal{K}_n di chiusi

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 &= \{K_0\} \\ \mathcal{K}_1 &= \{K_0, K_1\} \\ \mathcal{K}_2 &= \{K_0, K_1, K_2\} \\ \mathcal{K}_3 &= \{K_0, K_1, K_2, K_3\} \\ \mathcal{K}_4 &= \{K_0, K_1, K_2, K_3, K_4\} \\ \mathcal{K}_5 &= \{K_0, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5\} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Poichè lo spazio topologico $P_4(\mathcal{M})$ ha un numero finito di punti, per $n \geq 5$ si ha che $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_{n-1}$. Inoltre, per la scelta della successione \mathcal{K}_n effettuata si ha che $\mathcal{K}'_n = \mathcal{K}_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Generata l'algebra di insiemi per ogni \mathcal{K}_n , si ha che gli insiemi più piccoli sono esplicitamente

$$\begin{aligned} Y_0(1) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \\ Y_1(1) &= \{x_1, x_2, x_3\}, Y_1(2) = \{x_2\} \\ Y_2(1) &= \{x_1\}, Y_2(2) = \{x_4\}, \\ Y_2(3) &= \{x_2, x_3\} \\ Y_4(1) &= \{x_1\}, Y_4(2) = \{x_4\}, \\ Y_4(3) &= \{x_3\}, Y_4(4) = \{x_1\} \\ Y_5(1) &= \{x_1\}, Y_5(2) = \{x_4\}, \\ Y_5(3) &= \{x_3\}, Y_5(4) = \{x_1\} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

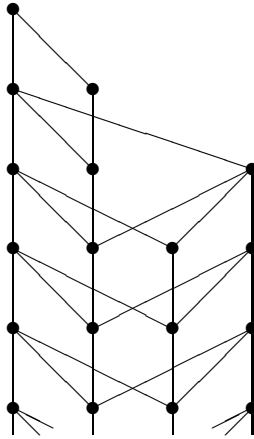
Per lo stesso motivo di cui sopra la successione si ripete per $n \geq 5$. La successione dei più piccoli insiemi di \mathcal{K}'_n che contengono gli insiemi $Y_j(m)$ è

4.5. Reticoli Noncommutativi.

data da

$$\begin{aligned}
 F_0(1) &= K_0, \\
 F_1(1) &= K_1, \quad F_1(2) = K_0, \\
 F_2(1) &= K_2, \quad F_2(2) = K_0, \\
 F_2(1) &= K_1, \\
 F_3(1) &= K_2, \quad F_3(2) = K_0, \\
 F_3(1) &= K_1, \quad F_3(4) = K_3, \\
 F_4(1) &= K_2, \quad F_4(2) = K_4, \\
 F_4(1) &= K_1, \quad F_4(4) = K_3, \\
 F_5(1) &= K_2, \quad F_5(2) = K_0, \\
 F_5(1) &= K_1, \quad F_5(4) = K_3 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.5.9}$$

A questo punto ricordiamo che l' n -esimo livello del diagramma di Bratteli associato sarà costituito da tanti punti quanti sono gli insiemi aventi come pedice n , ed inoltre che un punto k dell' n -esimo livello sarà collegato ad un punto j del livello $n+1$ se e soltanto se $Y_n(k) \cap F_{n+1}(j) \neq \{\emptyset\}$. Il diagramma di Bratteli è quindi



4.5. Reticoli Noncommutativi.

Ricordiamo che la molteplicità di immersione parziale è sempre uguale ad 1. La successione di algebre approssimanti sarà data da

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_0 &= \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \\
 \mathcal{A}_1 &= \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \\
 \mathcal{A}_2 &= \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \\
 \mathcal{A}_3 &= \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_4(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \\
 \mathcal{A}_4 &= \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_6(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_4(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \\
 &\vdots \\
 \mathcal{A}_n &= \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_{2n-2}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_{2n-4}(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{M}_1(\mathbb{C}) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

L'algebra limite \mathcal{A} della precedente successione è l'algebra AF associata a $P_4(\mathcal{M})$. Ma in che senso \mathcal{A} è "l'algebra delle funzioni continue" su $P_4(\mathcal{M})$? Come nel caso commutativo, è possibile realizzare \mathcal{A} come funzioni a valori operatoriali sul poset munito del prodotto puntuale: ricordando infatti che ogni punto x del poset è un ideale primitivo \mathcal{I}_x , il valore di $a \in \mathcal{A}$ su \mathcal{I}_x sarà

$$a(\mathcal{I}_x) \equiv \pi_{\mathcal{I}_x}(a)$$

dove $\pi_{\mathcal{I}_x}$ è la rappresentazione irriducibile avente come nucleo \mathcal{I}_x . Si capisce ora perché tali reticoli siano *veri* spazi noncommutativi, in quanto tutte le loro caratteristiche topologiche sono codificate in un'algebra⁹ non commutativa. D'altra parte, tali oggetti sono un interessante esempio di spazi noncommutativi *concreti*, in cui il concetto di punto risulta essere ancora ben definito, e mostrano come le tecniche della Geometria Noncommutativa si aggiungano ai classici metodi della topologia algebrica.

⁹A questo punto è necessaria una precisazione. È noto che due C^* -algebre possono avere le stesse rappresentazioni, e quindi gli stessi ideali primitivi: ciò comporta quindi che esse definiscono lo stesso poset. Esiste una relazione di equivalenza, detta di *Morita*, tra algebre che hanno le stesse rappresentazioni: l'algebra associata ad un poset sarà quindi da considerarsi modulo equivalenti di Morita.

Capitolo 5

Sfere Noncommutative e Sistemi Dinamici

*In questo capitolo studieremo un'algebra AF \mathcal{B}_θ ottenuto quotizzando l'algebra del toro \mathcal{A}_θ rispetto agli elementi che restano invariati sotto un'opportuno *-automorfismo dell'algebra. Mostreremo che, nel caso commutativo, tale operazione sullo spettro di \mathcal{A}_θ produce un orbifold toroidale, di cui \mathcal{B}_θ sarà l'analogo dell'algebra delle funzioni continue. Accenneremo poi alla descrizione algebrica dei sistemi dinamici, enfatizzando l'importanza delle derivazioni come analogo dei campi vettoriali sullo spazio delle posizioni nello studio dell'evoluzione di un sistema fisico. I lavori cui faremo costantemente riferimento sono [BEEK91],[BEEK92],[BK92].*

5.1 Algebre Invarianti e Toro Noncommutativo.

Antonella, ma questa è una sfera?

Come abbiamo visto nella sezione (3.7), il toro noncommutativo si può realizzare come la C^* -algebra $C^*(U, V)$ generata da due operatori unitari U e V che soddisfano alle relazioni (3.7.6). Nel caso commutativo, cioè per $\theta = 0$, U e V commutano e generano un'algebra che ovviamente è isomorfa all'algebra delle funzioni continue sul toro $T^2 \simeq \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Scelto infatti un sistema di coordinate locali $(\theta, \phi) \in [0, 1) \times [0, 1)$, ogni funzione $f(\theta, \phi)$ continua¹ si può

¹Ciò è vero per le funzioni $C^\infty(T^2)$, che però sono dense in $C(T^2)$.

5.1. *Algebre Invarianti e Toro Noncommutativo.*

esprimere mediante trasformata di Fourier nella forma

$$f(\theta, \phi) = \sum_{n,m} a_{nm} e^{2\pi i n \theta} e^{2\pi i m \phi} \quad (5.1.1)$$

e dove l'isomorfismo è dato da

$$U \rightarrow e^{2\pi i \theta}, \quad V \rightarrow e^{2\pi i \phi} \quad (5.1.2)$$

Consideriamo ora la seguente applicazione σ su $C^*(U, V)$, $\theta = 0$ che chiameremo *flip*, che sugli unitari U e V agisce come

$$\sigma(U) = U^{-1}, \quad \sigma(V) = V^{-1} \quad (5.1.3)$$

mentre su di un generico elemento f agisce come

$$\sigma(f) = \sum_{nm} a_{nm} \sigma(U)^n \sigma(V)^m \quad (5.1.4)$$

Così definito è facile vedere che σ è uno *-automorfismo di $C^*(U, V)$, e quindi un'isometria. Per l'isomorfismo in (5.1.2) abbiamo che σ induce sul toro commutativo la seguente trasformazione

$$(\theta, \phi) \rightarrow (-\theta, -\phi) \quad (5.1.5)$$

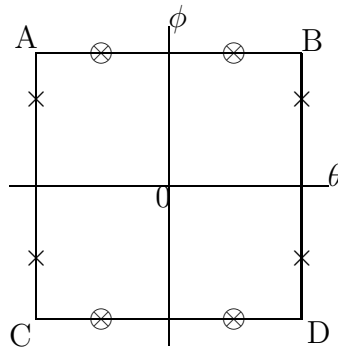
che si verifica facilmente essere un omeomorfismo. Indichiamo con $C^*(U, V)^\sigma$ l'insieme degli elementi a di $C^*(U, V)$ che sono invarianti per il flip, e cioè che verificano

$$\sigma(a) = a \quad (5.1.6)$$

Essendo σ uno *-automorfismo, si mostra agevolmente che $C^*(U, V)^\sigma$ è una sotto- C^* -algebra del toro, e viene spesso chiamata *algebra del punto fisso*. Qual è, a questo punto, lo spettro di tale sottoalgebra? Poichè σ induce l'omeomorfismo (5.1.5) su $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, lo spettro di $C^*(U, V)^\sigma$ si ottiene identificando i punti di T^2 con coordinate (θ, ϕ) , (θ', ϕ') tali che

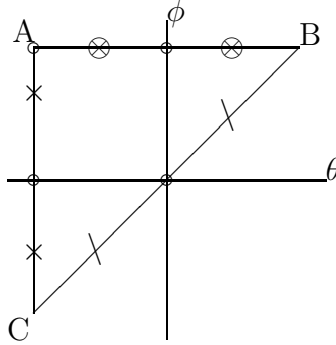
$$\theta' = -\theta, \quad \phi' = -\phi.$$

Per capire meglio tale discorso, consideriamo T^2 come il seguente quadrato di \mathbb{R}^2



5.1. *Algebre Invarianti e Toro Noncommutativo.*

dove abbiamo identificato i punti sui lati opposti. La trasformazione (5.1.5) sarà quindi una riflessione rispetto al punto 0: effettuato il quoziente, avremo che i rappresentativi delle classi di equivalenza rispetto all riflessione sono i punti del seguente grafico



dove come prima abbiamo indicato che i lati del triangolo con lo stesso simbolo sono simmetricamente identificati tra di loro. I quattro punti indicati con il cerchietto sono punti molto particolari: essi infatti sono gli unici punti del toro che restano *invarianti* sotto flip. Inoltre, le identificazioni sono state ottenute, ovviamente, utilizzando le identificazioni sul quadrato che definiscono il toro stesso. Topologicamente tale quoziente è omeomorfo a $S^{(2)}$, la due sfera: per mostrare ciò basta osservare che i punti A,B, e C sono identificati, e che, indicata con O l'origine, i segmenti CO e OB identificati costituiscono un arco della sfera che vall'origine al punto $A=B=C$. Lo stesso discorso vale ovviamente anche per gli altri due lati. A causa però dei quattro punti fissi di cui sopra, la struttura differenziale non è diffeomorfa a quella della sfera. In verità il quoziente precedente non può in alcun modo essere munito di una struttura di varietà quoziente, ed appartiene a quella classe di oggetti che va sotto il nome di *orbifold toroidali*. A questo punto si può pensare di generalizzare tale discorso al caso non commutativo, ed in particolare mostrare che l'automorfismo (5.1.3) si estende all'algebra \mathcal{A}_θ , quando $\theta \neq 0$. Ricordando le relazioni (3.7.6) ed indicando con ρ il fattore esponenziale, è facile verificare che

$$\begin{aligned}
 \sigma(U)\sigma(V) &= \sigma(UV) \\
 &= \sigma(VU\rho) \\
 &= \rho\sigma(VU) \\
 &= \rho\sigma(V)\sigma(U)
 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

e che quindi le relazioni che definiscono l'algebra del toro noncommutativo sono preservate. Così σ si estende ad un automorfismo involutivo di \mathcal{A}_θ che continuiamo a chiamare flip. Indichiamo con $\mathcal{B}_\theta = \mathcal{A}_\theta^\sigma$ l'algebra degli

5.2. L'Algebra Polinomiale.

elementi invariati sotto l'azione di σ : in analogia con il caso commutativo, chiameremo tali algebre *sfere noncommutative*, anche se il termine più corretto sarebbe *orbifold toroidali noncommutativi*. Come vedremo nel seguito, le caratteristiche di tali algebre per θ razionale e irrazionale sono alquanto differenti: una delle più interessanti, a nostro avviso, è che tali algebre sono approssimativamente finite e quindi studiabili con le tecniche del capitolo precedente. Infatti, per un risultato sugli spettri, le algebre AF commutative (unitali) sono algebre di funzioni continue su spazi topologici necessariamente *totalmente disconnessi*², che non possono essere muniti di struttura differenziabile: ciò coincide col fatto che, nel nostro caso, l'algebra \mathcal{B}_0 è un'algebra di funzioni continue su un orbifold, che è un oggetto patologico per quanto riguarda la struttura differenziabile.

A questo punto ci chiediamo come si possano caratterizzare le algebre \mathcal{B}_θ , indipendentemente dall'essere sottoalgebre del toro noncommutativo, ed in particolare quali siano i generatori e come si possa definire su di esse una C^* -norma. Ciò verrà discusso nelle prossime sezioni.

5.2 L'Algebra Polinomiale.

Sia $\mathcal{P} = \mathcal{P}(U, V)$ la $*$ -algebra dei polinomi negli unitari U e V , e sia \mathcal{P}^σ l'insieme degli elementi di \mathcal{P} che sono invariati per il flip. Essendo l'automorfismo σ involutivo, e cioè tale che $\sigma^2 = id_{\mathcal{A}_\theta}$, si ha immediatamente che $p = \frac{1}{2}(id_{\mathcal{A}_\theta} + \sigma)$ è un proiettore da \mathcal{P} a \mathcal{P}^σ : applicando tale proiettore ad un generico elemento di \mathcal{P} si ha che i polinomi invariati consistono nelle combinazioni lineari finite degli elementi

$$(n, m) \equiv U^n V^m + U^{-n} V^{-m} \quad (5.2.1)$$

Utilizzando la definizione precedente, le relazioni (3.7.6), ed il fatto che U e V sono unitari si mostra agevolmente che

$$(n, m)(k, l) = \rho^{mk}(n+k, m+l) + \rho^{-mk}(n-k, m-l) \quad (5.2.2)$$

$$(n, m)^* = \rho^{nm}(n, m) \quad (5.2.3)$$

$$(n, m) = (-n, -m) \quad (5.2.4)$$

e quindi che \mathcal{P}^σ è caratterizzata come la $*$ -algebra (universale) generata dagli elementi (n, m) , $n, m \in \mathbb{Z}$ soddisfacente alle equazioni precedenti. Mostriamo, a questo punto, che l'algebra \mathcal{P}^σ ha un numero finito di generatori nel

²Un spazio topologico è detto *totalmente disconnesso* se le uniche componenti sono i punti stessi (vedi App.A).

5.2. L'Algebra Polinomiale.

caso in cui $\rho \neq \pm 1$. Definiamo due elementi

$$\begin{aligned} A &\equiv (1, 0) = U + U^{-1} \\ B &\equiv (0, 1) = V + V^{-1} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

A questo punto assumiamo che $\rho \neq 1$ e siano N e M due numeri naturali. Mostriamo che l'insieme delle combinazioni lineari a coefficienti complessi degli elementi (n, m) , con $|n| \leq N, |m| \leq M$ coincide con l'insieme delle combinazioni lineari degli elementi della forma

$$\begin{aligned} A^n B^m, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M \\ A^{n-1} B A B^{m-1}, \quad n = 1, \dots, N, \quad m = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

con la convenzione che $A^0 B^0 = \mathbb{I}$.

Supponiamo che $N \geq 1, M \geq 1$ e consideriamo il monomio $A^N B^M$, che può scriversi come

$$A^N B^M = (U + U^{-1})^N (V + V^{-1})^M$$

Poichè un qualsiasi elemento dell'algebra invertibile commuta con il suo inverso, possiamo usare la formula di Newton per le potenze di un binomio

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (5.2.7)$$

per espandere i due fattori. In generale, i termini (N, M) e $(N, -M)$ appariranno entrambi con coefficiente $1 = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$, mentre gli altri termini (n, m) saranno tali che $|n| \leq N, |m| \leq M$, ed almeno una delle due è una disuguaglianza stretta. Se, per induzione, esprimiamo ogni (n, m) nella maniera precedente otteniamo che, scelti opportunamente i coefficienti $\lambda_{n,m}$ e $\mu_{n,m}$, con $\lambda_{N,M} = \mu_{N,M}$ abbiamo che

$$(N, M) + (N, -M) = A^N B^M - \left(\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \lambda_{n,m} A^n B^m + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \mu_{n,m} A^{n-1} B A B^{m-1} \right) \quad (5.2.8)$$

Similmente, se si espande il termine $A^{N-1} B A B^{M-1}$ come

$$A^{N-1} B A B^{M-1} = (U + U^{-1})^{N-1} (V + V^{-1}) (U + U^{-1}) (V + V^{-1})^{M-1} \quad (5.2.9)$$

si ottiene l'equazione

$$\rho(N, M) + \rho^{-1}(N, -M) = A^{N-1} B A B^{M-1} - \text{termini di grado inferiore} \quad (5.2.10)$$

5.2. L'Algebra Polinomiale.

che, nel caso $\rho \neq \rho^{-1}$, cioè $\rho \neq 1$, è indipendente dall'equazione (5.2.8) e ci permette così di ricavare (N, M) e $(N, -M)$ come combinazione lineare dei termini $A^n B^m$ e $A^{n-1} B A B^{m-1}$ con $n \leq N$ e $m \leq M$. Procedendo si riesce a mostrare che tutti gli elementi (n, m) si possono esprimere come combinazioni della forma (5.2.6), ed inoltre che l'unione su N ed M di tali elementi costituisce una base per \mathcal{P}^σ . In vista della ricerca di una caratterizzazione intrinseca di \mathcal{P}^σ , non data cioè dalla realizzare di \mathcal{B}_θ come sottoalgebra del toro, tale risultato è ancora troppo generale, in quanto, si capisce, l'algebra dei polinomi possibilmente non omogenei in due elementi autoaggiunti contiene elementi che non appartengono a \mathcal{P}^σ , non contenendo alcuna *informazione* su σ . Cerchiamo quindi delle identità polinomiali cui A, B , e \mathbb{I} devono soddisfare. È facile constatare che non vi sono identità non banali del secondo ordine, a parte $AB = \rho BA$ quando $\rho = \pm 1$. Espandiamo in termini di (n, m) i monomi del terzo ordine $A^2 B, ABA$, e BA^2 : si ottengono così le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} A^2 B &= (2, 1) + (2, -1) + 2B \\ ABA &= \rho(2, 1) + \rho^{-1}(2, -1) + (\rho + \rho^{-1})B \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

$$BA^2 = \rho^2(2, 1) + \rho^{-2}(2, -1) + 2B$$

Se eliminiamo l'elemento $(2, 1)$ e $(2, -1)$ dalle precedenti equazioni otteniamo la relazione

$$BA^2 + A^2 B = (\rho + \rho^{-1})ABA - (\rho - \rho^{-1})^2 B \quad (5.2.12)$$

A questo punto urge una precisazione. Si sarà notato che nelle relazioni (5.2.11) non compare il termine BAB , ne tantomeno i termini AB^2 e $B^2 A$. Si consideri, infatti, il seguente automorfismo τ di $\mathcal{P}(U, V)$

$$U \rightarrow V, \quad V \rightarrow U^{-1} \quad (5.2.13)$$

Si verifica immediatamente che $\tau^2 = \sigma$, e che τ commuta con σ , in quanto

$$\tau \circ \sigma = \tau \circ (\tau \circ \tau) = (\tau \circ \tau)\tau = \sigma \circ \tau \quad (5.2.14)$$

Ciò permette di affermare che τ è anche automorfismo di \mathcal{P}^σ , e che in termini di A e B si esprime come

$$A \rightarrow B, \quad B \rightarrow A \quad (5.2.15)$$

5.2. L'Algebra Polinomiale.

A questo punto, per completare il discorso, basta osservare che dato un qualsiasi omorfismo iniettivo η ed un polinomio $P(Q, P)$ di due variabili, anche non commutanti, si ha che

$$\eta(P(Q, P)) = P(\eta(Q), \eta(P)) \quad (5.2.16)$$

e quindi che $P(Q, P) = 0$ implica che $P(\eta(Q), \eta(P)) = 0$. A questo punto, applicando l'automorfismo (5.2.15) alle relazioni (5.2.11) otteniamo le omesse relazioni per BAB, AB^2 , e B^2A . Inoltre, per il discorso precedente, dall'equazione (5.2.12) otteniamo che

$$AB^2 + B^2A = (\rho + \rho^{-1})BAB - (\rho - \rho^{-1})^2A \quad (5.2.17)$$

Inoltre, introducendo gli ulteriori automorfismi

$$U \rightarrow -U, \quad V \rightarrow V \quad (5.2.18)$$

$$A \rightarrow -A, \quad B \rightarrow B$$

e

$$U \rightarrow U, \quad V \rightarrow -V \quad (5.2.19)$$

$$A \rightarrow A, \quad B \rightarrow -B$$

si può mostrare che *ogni* identità polinomiale del terzo ordine in A e B è combinazione lineare delle equazioni (5.2.12) e (5.2.17). Ciò può sembrare strano, in quanto nelle equazioni prima citate non compaiono fattori del tipo A^3, B^3 e \mathbb{I} . A tale proposito mostriamo, a titolo di esempio, che *non esistono* identità polinomiali in $A, B \in \mathcal{P}^\sigma$ del terzo ordine contenenti l'identità e fattori cubici in A e B . Si consideri infatti la seguente equazione

$$\begin{aligned} &\alpha_1 A^3 + \alpha_3 A^2 B + \alpha_4 A B^2 + \alpha_5 A B A + \alpha_6 B A^2 \\ &+ \alpha_7 B A B + \alpha_8 B^2 A + \beta \mathbb{I} + \alpha_2 B^3 = 0 \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

La precedente equazione può essere riscritta come

$$\alpha_1 A^3 + P_1(A, B) + \alpha_2 B^3 + \beta \mathbb{I} = 0 \quad (5.2.21)$$

con ovvio significato delle notazioni. Applicando gli automorfismi (5.2.18) e (5.2.19) all'equazione precedente, e osservando che $P_1(-A, B) = -P_1(A, B)$ e $P_1(A, -B) = -P_1(A, B)$ otteniamo che A e B debbono soddisfare anche

$$-\alpha_1 A^3 - P_1(A, B) + \beta \mathbb{I} + \alpha_2 B^3 = 0 \quad (5.2.22)$$

$$\alpha_1 A^3 - P_1(A, B) + \beta \mathbb{I} - \alpha_2 B^3 = 0 \quad (5.2.23)$$

5.2. L'Algebra Polinomiale.

Sostituendo nella (5.2.20), si ha che

$$\begin{aligned}\alpha_1 A^3 &= -\beta \mathbb{I} \\ \alpha_2 B^3 &= -\beta \mathbb{I}\end{aligned}$$

che implica $\alpha_1 = \beta = \alpha_2 = 0$.

Le relazioni (5.2.12) e (5.2.17), però, non sono sufficienti a caratterizzare l'algebra \mathcal{P}^σ : cerchiamo quindi identità polinomiali del quarto ordine, che siano invariate sotto gli automorfismi (5.2.18) e (5.2.19). Si ha che

$$\begin{aligned}BABA &= \rho^3(2, 2) + \rho^{-3}(2, -2) + (\rho + \rho^{-1})(A^2 + B^2 - \mathbb{I}) \\ ABAB &= \rho(2, 2) + \rho^{-1}(2, -2) + (\rho + \rho^{-1})(A^2 + B^2 - \mathbb{I}) \\ A^2B^2 &= (2, 2) + (2, -2) + 2(A^2 + B^2 - \mathbb{I}) \\ B^2A^2 &= \rho^4(2, 2) + \rho^{-4}(2, -2) + 2(A^2 + B^2 - \mathbb{I}) \\ BA^2B &= \rho^2(2, 2) + \rho^{-2}(2, -2) + (\rho^2 + \rho^{-2})A^2 + 2B^2 - 2(\rho^2 + \rho^{-2})\mathbb{I} \\ AB^2A &= \rho^2(2, 2) + \rho^{-2}(2, -2) + 2A^2 + (\rho^2 + \rho^{-2})B^2 - 2(\rho^2 + \rho^{-2})\mathbb{I}\end{aligned}\tag{5.2.24}$$

Quindi, eliminando gli elementi $(2, 2)$ e $(2, -2)$, uno qualsiasi degli elementi $BABA, ABAB, A^2B^2, B^2A^2$ può essere espresso come combinazione lineare di altri due, insieme a A^2, B^2 e \mathbb{I} . Poichè ci tornerà utile nel seguito, esprimiamo $BABA$ in termini di $ABAB$ e A^2B^2 , ottenendo così per $\rho \neq \pm 1$

$$\begin{aligned}BABA &= (\rho^2 + 1 + \rho^{-2})ABAB - (\rho + \rho^{-1})A^2B^2 \\ &\quad + (\rho + \rho^{-1} - (\rho^3 + \rho^{-3}))(A^2 + B^2 - \mathbb{I})\end{aligned}\tag{5.2.25}$$

A questo punto si può mostrare che non vi sono altre relazioni utili a specificare l'algebra. Tale risultato è contenuto nella seguente proposizione:

Proposizione *Indichiamo con $\mathcal{P}(A, B, \mathbb{I})$ la $*$ -algebra dei polinomi in due elementi autoaggiunti A e B soddisfacenti le relazioni (5.2.12), (5.2.17), (5.2.25). Se $\rho \neq \pm 1$, allora $\mathcal{P}(A, B, \mathbb{I})$ è canonicamente isomorfa a \mathcal{P}^σ mediante la corrispondenza*

$$\begin{aligned}A &\rightarrow U + U^{-1} \\ B &\rightarrow V + V^{-1}\end{aligned}\tag{5.2.26}$$

5.2. *L'Algebra Polinomiale.*

Dim. La dimostrazione procede mostrando che ogni elemento di $\mathcal{P}(A, B, \mathbb{I})$ è una combinazione lineare di

$$A^n B^m, \quad n, m = 0, 1, \dots \quad (5.2.27)$$

e

$$A^{n-1} B A B^{m-1} \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (5.2.28)$$

A tale scopo, mostriamo per induzione che ogni “parola” in A e B di lunghezza k è una combinazione lineare degli elementi (5.2.27) e (5.2.28) con $n + m \leq k$. Ovviamente, ciò è triviale per $k = 1$: supponiamo che la precedente affermazione valga per un k arbitrario e sia W una parola di lunghezza $k + 1$. Allora $W = AW'$ o $W = BW'$, dove W' è una parola di lunghezza k . In verità dovremmo considerare anche il caso in cui $W = W'A$ o $W = W'B$: utilizzando le relazioni (5.2.11) si può mostrare agevolmente che tale situazione viene ricondotta al caso precedente. Utilizzando l'ipotesi di induzione, cioè che una parola di lunghezza k è combinazione lineare di (5.2.27) e (5.2.28), possiamo supporre che $W' = A^n B^m$ o $W' = A^{n-1} B A B^{m-1}$ con $n + m = k$. Nel caso in cui $W = AW'$ la proposizione è dimostrata immediatamente. Se $W = BW'$ bisogna distinguere due casi:

- $W = BA^n B^m$. Se $n = 0$ l'ipotesi è verificata; se $n = 1$ W è della forma (5.2.28); se $n \geq 2$ possiamo usare l'equazione (5.2.12) per scrivere BA^2 come combinazione lineare di ABA, A^2B e B . Si ha così

$$BA^n B^m = \alpha_1 A(BA^{n-1} B^m) + \alpha_2 A^2(BA^{n-2} B^m) + \alpha_3 (BA^{n-2} B^m) \quad (5.2.29)$$

Osservando che le parole tra parentesi sono di lunghezza $n + m \leq k$, si possono esprimere mediante termini del tipo $A^n B^m$ e $A^{n-1} B A B^{m-1}$, e la proposizione è quindi dimostrata.

- $W = BA^{n-1} B A B^{m-1}$. Nel caso in cui $n = 1$, analogamente al caso precedente, si utilizza la relazione (5.2.17) per esprimere $B^2 A$ come combinazione lineare di $ABA, A^2 B$, e B , e dopo aver sostituito si utilizza l'ipotesi di induzione. Per lo stesso discorso, nel caso $n = 2$ si utilizza la relazione (5.2.25) per esprimere $BABA$ in termini di $ABAB, A^2 B^2, A^2, B^2$ e \mathbb{I} , mentre nel caso $n \geq 3$ si usa la relazione (5.2.12).

Ciò conclude la dimostrazione. \square

Tale teorema è molto importante, perché, come accennato in precedenza, mostra che le relazioni (5.2.12), (5.2.17), (5.2.25) caratterizzano interamente

5.2. L'Algebra Polinomiale.

l'algebra $\mathcal{P}(A, B, \mathbb{I})$ come la sottoalgebra del toro noncommutativo dei polinomi invarianti rispetto al flip. Un'altro risultato importante, cui acceniamo soltanto, è che le relazioni precedenti sono indipendenti, cioè non si possono ottenere una dall'altra.

Osservazione *Il lettore si sarà chiesto come mai lo studio dell'algebra \mathcal{P}^σ dei polinomi invarianti risulti complicato e laborioso rispetto, ad esempio, all'algebra del toro noncommutativo. Nella sezione (3.7), infatti, abbiamo subito introdotto l'espressione (3.7.7) che permette di esprimere in forma compatta ogni elemento dell'algebra del toro. Ci si può chiedere perché in questo caso si sia seguito un percorso diverso, ed oggettivamente più tortuoso. La risposta sta nel fatto che in generale un'algebra di polinomi in due variabili x e y non commutanti è un oggetto molto complicato da trattare: se infatti non esistono vincoli tra le variabili x e y sarà impossibile trovare una forma compatta con cui esprimere ogni polinomio. Nel caso del toro noncommutativo, le relazioni (3.7.6) permettono di verificare che $V^n U^m \propto U^m V^n$ e quindi di scrivere la relazione (3.7.7). Alla luce di tali osservazioni, risulta ancora più evidente l'importanza del teorema precedentemente mostrato, che ci permette di affermare così che ogni polinomio invariante sotto l'azione del flip è del tipo*

$$\sum_{n,m \in \mathbb{N}} (a_{nm} A^n B^m + c_{nm} A^{n-1} B A B^{m-1})$$

Concludiamo la presente sezione osservando che, in generale, i risultati finora ottenuti cessano di valere nel caso in cui $\rho = \pm 1$. Infatti, l'algebra \mathcal{P}^σ risulta, in questi casi, "più grande" dell'algebra dei polinomi in A, B e \mathbb{I} : si può mostrare, per esempio, che $UV + U^{-1}V^{-1}$ non è un polinomio in A, B e \mathbb{I} quando $\rho = \pm 1$.

Nella prossima sezione accenneremo al fatto che esiste una (unica) C^* -norma su \mathcal{P}^σ che coincide con quella ereditata dal toro noncommutativo, per poi passare ad alcuni risultati che si hanno nel caso in cui θ è razionale o irrazionale

5.3 La C^* -algebra.

Illustriamo nel seguito una tecnica in generale molto utile per costruire una C^* -algebra a partire da una $*$ -algebra. Per $x \in \mathcal{P}(A, B, \mathbb{I})$ si definisca

$$\|x\|_0 = \sup \|\pi(x)\| \quad (5.3.1)$$

dove π varia su tutti gli $*$ -omomorfismi di $\mathcal{P}(A, B, \mathbb{I})$ negli operatori limitati su di uno spazio di Hilbert. In verità $\|\cdot\|_0$ può non essere una norma, ma una seminorma, e, cosa ancor più grave, potrebbe a priori essere infinita per qualche x . Per θ irrazionale, nessuna delle due situazioni si verifica. Infatti si ha

$$\|A\|_0 = 2, \quad \|B\|_0 = 2 \quad (5.3.2)$$

per θ irrazionale.

Basta mostrare, infatti, che

$$\|A\|_\pi = \|\pi(A)\| \leq 2, \quad \|B\|_\pi = \|\pi(B)\| \leq 2 \quad (5.3.3)$$

per tutte le rappresentazioni π . Assumiamo che $\|A\|_\pi \geq 2$ e $\|B\|_\pi \geq 2$, e consideriamo la C^* -algebra \mathcal{C} ottenuta chiudendo i polinomi con la norma $\|\cdot\|_\pi$, che nel seguito indicheremo con $\|\cdot\|$.

A questo punto è utile fare un'osservazione sulle relazioni (3.7.6): se U, V soddisfano $UV = \rho VU$, allora U^2, V soddisferanno $U^2V = \rho^2 VU^2$. È facile verificare che $U^2 + U^{-2} = A^2 - \mathbb{I}$. È chiaro, quindi, che per ogni identità polinomiale $P(\rho, A, B) = 0$ costruita a partire dalle relazioni (3.7.6) si avrà che $P(\rho^2, A^2 - \mathbb{I}, B) = 0$. Applicando tale risultato alla relazione (5.2.17) si ottiene la seguente equazione

$$\begin{aligned} 2(\rho^2 - \rho^{-2})^2 \mathbb{I} = & A^2 B^2 + B^2 A^2 - (\rho^2 + \rho^{-2}) B A^2 B \\ & + 2(\rho - \rho^{-1})^2 B^2 + (\rho^2 - \rho^{-2})^2 A^2 \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Si scelga ora uno stato ω su \mathcal{C} tale che

$$|\omega(B)| = \|B\| \quad (5.3.5)$$

e si applichi ω all'equazione (5.3.4). Si avrà che

$$\begin{aligned} -8 \sin^2(2\varphi) = & 2\|B\|^2 \omega(A^2) - 2 \cos(2\varphi) \|B\|^2 \omega(A^2) - 8 \sin^2(\varphi) \|B\| \\ & - 4 \sin^2(2\varphi) \omega(A^2) \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

dove abbiamo posto $\varphi = 2\pi\theta$. Dopo manipolazione algebrica si ottiene

$$\sin^2(\varphi) [\omega(A^2) - 2] [\|B\|^2 - 4 \cos^2(\varphi)] = 0 \quad (5.3.7)$$

5.3. La C^* -algebra.

Poichè θ è irrazionale, dall'equazione precedente si ha che $\omega(A^2) = 2$ o che $\|B\| = 2|\cos(\varphi)|$: ma dato che $|\cos(\varphi)| < 1$, essendo θ irrazionale, e $\|B\| \geq 2$ per ipotesi, si ha necessariamente

$$\omega(A^2) = 2 \quad (5.3.8)$$

Applicando l'automorfismo $A \rightarrow B, B \rightarrow A$ all'equazione (5.3.4), e valutando ω sull'equazione risultante tenendo presente la (5.3.8) si ottiene

$$2\|B\|^2 \cos^2(2\varphi) = -\cos(2\varphi) (8 \sin^2(\varphi) - \omega(AB^2A)) \quad (5.3.9)$$

Essendo AB^2A un elemento positivo, $\omega(AB^2A) \geq 0$. Se $\cos(2\varphi) < 0$ segue cosí che

$$\|B\|^2 \leq -4 \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos(2\varphi)} \quad (5.3.10)$$

Consideriamo $\mathcal{P}(A, B, \mathbb{I})$ come sottoalgebra di $\mathcal{P}(U, V)$, e sostituiamo A con $U^n + U^{-n}$ che è un polinomio in A , e ρ con ρ^n , cioè φ con $n\varphi$. Per quanto detto precedentemente, si otterrà che $\omega((U^n + U^{-n})) = 2$, ed inoltre

$$\|B\|^2 \leq -4 \frac{\sin^2(n\varphi)}{\cos(2\varphi)} \quad (5.3.11)$$

Poichè θ è irrazionale, l'insieme $\{\rho^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è denso sul cerchio. Ciò significa che l'espressione

$$\|B\|^2 \leq -4 \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(2\alpha)} \quad (5.3.12)$$

è verificata per qualsiasi numero reale α tale che $\cos(2\alpha) < 0$. Se si pone $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ha

$$\|B\| \leq 2 \quad (5.3.13)$$

L'ipotesi che $\|B\| \geq 2$ implica cosí che $\|B\| = 2$. Utilizzando lo stesso discorso si prova che $\|A\| \leq 2$, e quindi che $\|A\| = 2$.

Abbiamo mostrato, quindi, che $\|x\|_0 < \infty$ per qualsiasi elemento x di $\mathcal{P}(A, B)$, e che $\|\cdot\|_0$ è effettivamente una C^* -norma.

Concludiamo questa sezione enunciando una proposizione che sancisce che la C^* -algebra $C^*(A, B)$ ottenuta da $\mathcal{P}(A, B)$ mediante la norma $\|\cdot\|_0$ coincide, nel caso irrazionale, con la sottoalgebra \mathcal{B}_θ dell'algebra del toro noncommutativo: la dimostrazione verrà data in appendice.

Proposizione *Sia θ irrazionale. Allora la C^* -norma $\|\cdot\|_0$ su $\mathcal{P}(A, B)$ coincide con la norma che $\mathcal{P}(A, B)$ ha come sottoalgebra di \mathcal{A}_θ , cioè l'algebra $C^*(A, B)$ è canonicamente isomorfa alla sottoalgebra \mathcal{B}_θ degli elementi invarianti sotto il flip σ .*

5.4 θ Razionale vs. θ Irrazionale.

Discuteremo in questa sezione alcune caratteristiche dell'algebra \mathcal{B}_θ nel caso in cui θ sia razionale e irrazionale. Nel capitolo 2 abbiamo visto, infatti, che le caratteristiche dell'algebra \mathcal{A}_θ differiscono molto al variare di θ : sostanzialmente, nel caso in cui $\theta = \frac{p}{q}$ con p e q interi relativamente primi, l'algebra \mathcal{A}_θ del toro noncommutativo è un'algebra di campi sul toro commutativo a valori nelle matrici $q \times q$, la cui carica topologica è rappresentata dall'intero p . Ci si chiede, quindi, se questa peculiarità si conservi per la sottoalgebra \mathcal{B}_θ . A tale proposito, enunciamo il seguente teorema, rimandando per la dimostrazione a [BEEK92].

Teorema *Sia $\theta = \frac{p}{q}$ dove p e q sono interi mutuamente primi, e tali che $\theta \notin \{0, \frac{1}{2}\}$. Allora \mathcal{B}_θ è una sottoalgebra della C^* -algebra $C(S^2, M_q)$ delle funzioni continue dalla 2-sfera $S^{(2)}$ nell'algebra delle matrici $q \times q$. A meno di isomorfismo, la sottoalgebra è determinata nella seguente maniera: ad ognuno dei quattro punti invarianti $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ sulla sfera viene associato un proiettore P_i nell'algebra M_q . La dimensione³ di P_i non è arbitraria, ma è data da:*

quando q è dispari, allora

$$\dim(P_i) = \frac{q-1}{2} \quad (5.4.1)$$

per $i = 0, 1, 2, 3$

quando q è pari, allora

$$\dim(P_0) = \frac{q-2}{2} \quad (5.4.2)$$

e

$$\dim(P_i) = \frac{q}{2} \quad (5.4.3)$$

L'algebra \mathcal{B}_θ consiste in quelle funzioni $f \in C(S^{(2)})$ tali che $f(\omega_i)$ commuti con P_i , con $i = 0, 1, 2, 3$.

³Per *dimensione* di P_i intendiamo la dimensione del rango di P_i come sottospazio vettoriale.

5.4. θ Razionale vs. θ Irrazionale.

Così, se $q = 1$, \mathcal{B}_θ è l'algebra delle funzioni continue sulla 2-sfera; se $q = 2$, \mathcal{B}_θ è l'algebra delle funzioni continue da $S^{(2)}$ nelle matrici 2×2 tali da prendere valori in una subalgebra della forma $M_1 \oplus M_1$ in $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, senza alcuna restrizione nel punto ω_0 . Quando $q \geq 3$, si ha che in ogni punto ω_i l'algebra si spezza in una somma diretta di due algebre di matrici.

Un'altro aspetto molto interessante del caso razionale è dato dalla classe di isomorfismo dell'algebra \mathcal{B}_θ . Nel capitolo 2 abbiamo visto che due algebre $\mathcal{A}_{\frac{p'}{q}}$ e $\mathcal{A}_{\frac{p}{q}}$ sono isomorfe se e soltanto se $p' = p$, oppure $p' = q - p$: nel caso dell'algebra \mathcal{B}_θ , invece, la classe di isomorfismo dipende soltanto da q . Inoltre si può mostrare per qualsiasi valore degli interi q e p , \mathcal{B}_θ è l'algebra delle sezioni di un fibrato vettoriale sulla 2-sfera che è triviale.

Osservazione *Vogliamo proporre uno spunto di riflessione che ci è apparso interessante durante la stesura di tale parte e che, in un certo senso, segue la stessa linea delle prossime sezioni. Supponiamo di studiare una teoria di campo sul toro tale che i campi siano a valori nelle matrici $q \times q$ e che sia presente una carica topologica non banale rappresentata da p . Cosa succede se la dinamica di tale monopolo è ristretta alla 2-sfera con quattro "punture" di cui sopra? Essendo \mathcal{B}_θ un'algebra di campi di un fibrato triviale, essa non può ospitare cariche di monopolo, che necessariamente comporterebbero un twist delle fibre. Si può interpretare ciò come un'ostruzione alla riduzione dinamica sopra proposta?*

Notiamo che nell'enunciato del teorema precedente abbiamo richiesto che $\theta \notin \{0, \frac{1}{2}\}$: i risultati precedenti falliscono, in questo caso, nel senso che il metodo illustrato nella sezione precedente per costruire una C^* -algebra a partire dalla $*$ -algebra dei polinomi \mathcal{P}^σ non è applicabile. Esistono, infatti, rappresentazioni π di \mathcal{P}^σ , unidimensionali nel caso in cui $\theta = 0$ e bidimensionali nel caso in cui $\theta = \frac{1}{2}$, tali che $\|\pi([(n, m)])\|$ cresce esponenzialmente con (n, m) .

Il caso in cui θ è irrazionale è notevolmente più complicato, ma porta con sé di vantaggioso che l'algebra \mathcal{B}_θ è approssimativamente finita. Nel seguito intendiamo descrivere soltanto la linea generale che porta a tale conclusione: per un'analisi completa si veda [BK92]. Differentemente da quanto si possa pensare, la dimostrazione non si ottiene costruendo esplicitamente una successione di sotto- C^* -algebre tali che, come abbiamo visto nel capitolo 3, il limite sia \mathcal{B}_θ . L'idea, invece, consiste nel costruire delle sottoalgebre di \mathcal{B}_θ generate da proiettori ottenuti da una particolare partizione del cerchio, chiamata "torre di Putnam". Tali sottoalgebre godono della proprietà che

5.4. θ Razionale vs. θ Irrazionale.

i loro elementi riescono ad approssimare in norma bene quanto si voglia gli elementi di \mathcal{B}_θ . Lo scopo è quello di porsi nelle condizioni di validità del seguente teorema di approssimazione [Bra72]:

Teorema *Una C^* -algebra \mathcal{U} è AF se e soltanto se valgono le seguenti condizioni:*

i) \mathcal{U} è separabile.

ii) se $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{U}$ ed $\epsilon > 0$, allora esiste una sotto- C^ -algebra finito dimensionale \mathcal{B} di \mathcal{U} e degli elementi y_1, \dots, y_n di \mathcal{B} tale che $\|x_i - y_i\| < \epsilon$, $i = 1, \dots, n$*

L'unico problema in questo caso è che le sottoalgebre in questione *non* sono finito-dimensionali. Tuttavia si riesce a mostrare che \mathcal{B}_θ è comunque il limite di una successione

$$A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow \dots$$

dove le sottoalgebre A_i sono infinito-dimensionali, ma possono essere espresse come somma diretta di un numero finito di algebre chiamate “basic building block” $C_{n,k}$. Il fatto che per θ irrazionale l'algebra \mathcal{B}_θ ha un'unica traccia, ovvero quella ereditata dal toro noncommutativo, permette di utilizzare il seguente teorema dimostrato in [BK92]:

Teorema *Sia \mathcal{C} un'algebra C^* -algebra semplice unitale che ha un'unica traccia, ed sia inoltre \mathcal{C} il limite induttivo di una successione di algebre che si possono esprimere come somma diretta di un numero finito di “basic building block” $C_{n,k}$. Allora \mathcal{C} è una algebra AF.*

5.5 Sistemi Dinamici e Derivazioni.

Nelle seguenti sezioni introduciamo qualche nozione sulla descrizione algebrica della dinamica di un sistema e delle sue simmetrie. Per un approfondimento e per ulteriori dettagli si rimanda a [Bra81] e [Sak91]. Nel seguito, inoltre, useremo il termine inglese “ C^* -dynamical system”, in quanto non vi è una traduzione adatta in italiano.

5.5.1 C^* -Dynamical Systems: Motivazioni.

Che cos'è un sistema dinamico, o meglio cosa intendiamo in questo contesto per sistema dinamico⁴? Usualmente un sistema fisico è descritto per grandi linee in due stadi: dapprima vi è una descrizione *cinematica*, che stabilisce quali siano gli *osservabili* e gli *stati* possibili del sistema in studio, e come essi vadano modellati matematicamente. A tale livello, si può pensare al sistema come “congelato” ad un istante di tempo particolare. In seguito bisogna assegnare la *dinamica* del sistema, ovvero specificare come ogni singolo stato si modifica al variare di un parametro di *evoluzione*, che spesso si identifica con il tempo. Ovviamente dovremo fare in modo da tener presente le caratteristiche fisiche dei diversi sistemi e della loro evoluzione, quali, a titolo di esempio, la continuità dell'evoluzione stessa o la sua unicità. Di solito siamo abituati a descrivere sistemi classici mediante le equazioni di Newton, di Lagrange, o di Hamilton, e a descrivere l'evoluzione di sistemi fisici mediante le soluzioni delle precedenti equazioni. Nella nostra accezione di sistema dinamico, però, non è richiesto che *tutti* i sistemi fisici rientrino nelle classi precedenti: ad esempio, non necessariamente un sistema che si evolve si può descrivere mediante un formalismo hamiltoniano, come non è detto che tutti i sistemi di particelle classiche interagenti possano essere descritti mediante l'assegnazione di una legge di forza dipendente soltanto dal punto e dalla velocità⁵. A tale proposito, cercando di racchiudere le caratteristiche che sembrano essere comuni a una vasta classe di sistemi fisici, si giunge alla seguente definizione di sistema dinamico:

Un sistema dinamico è una tripla (\mathcal{M}, T, ϕ) , dove \mathcal{M} è lo spazio degli stati del sistema, T è l'intervallo di variabilità del parametro di evoluzione, che per noi sarà l'intera retta reale, $\phi : \mathcal{M} \times T \rightarrow \mathcal{M}$ è detta mappa di evoluzione, ed è tale che

⁴Quanto segue è riferito a sistemi dinamici reversibili, non relativistici e autonomi, cioè indipendenti dal tempo.

⁵Un esempio noto di quest'ultima classe di sistemi è dato da una particella carica classica irradiante in un campo elettromagnetico esterno

5.5. Sistemi Dinamici e Derivazioni.

per ogni $x \in \mathcal{M}$ e $t, s \in T$ si ha

$$\phi(x, 0) = x, \quad \phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, s + t) \quad (5.5.1)$$

Notiamo che le equazioni (5.5.1) formalizzano da un lato la richiesta che all'istante $t = 0$ siano assegnati particolari dati iniziali, e dall'altro che l'evoluzione dinamica del sistema sia unica. È interessante osservare, inoltre, che dell'insieme T abbiamo utilizzato soltanto la struttura topologica e la struttura gruppale, ovvero il fatto che è possibile sommare due parametri di evoluzione: ciò sarà utile per comprendere le generalizzazioni che daremo nel seguito. A questo punto, definita $\phi^t(x) = \phi(x, t)$, $(x, t) \in \mathcal{M} \times T$, chiameremo *evoluzione del punto x* l'insieme $\{\phi^t(x)\}_{t \in T}$.

L'insieme degli stati \mathcal{M} sarà, in base allo specifico sistema in studio, munito di varie strutture, quale una topologia, una struttura differenziabile etc.: a tale proposito si chiederà, ovviamente, che la mappa ϕ^t prima definita preservi tali strutture. Supponiamo, quindi, che lo spazio degli stati sia uno spazio topologico sufficientemente regolare⁶: abbiamo imparato nel primo capitolo che tali oggetti possono essere descritti in maniera duale mediante le funzioni continue definite su di essi, che contengono gli osservabili della teoria. Ci si chiede, a questo punto, se è possibile “dualizzare” in maniera analoga anche la descrizione della dinamica di un sistema fisico, estendendo i discorsi precedenti all'algebra che descrive \mathcal{M} . A tale proposito, osserviamo che le mappe ϕ^t su \mathcal{M} possono estendersi a mappe lineari sull'algebra delle funzioni continue su \mathcal{M} nella seguente maniera

$$\tilde{\phi}^t(f)(x) \equiv f(\phi^t(x)) \quad (5.5.2)$$

$\forall t \in T, \forall x \in \mathcal{M}, \forall f \in C(\mathcal{M})$. Si prova agevolmente che, per ogni t , le mappe $\tilde{\phi}^t$ sono *-automorfismi dell'algebra $C(\mathcal{M})$: a questo punto risulta abbastanza chiaro come generalizzare la definizione di sistema dinamico quando la cinematica è descritta da un'arbitraria C^* -algebra, commutativa o non commutativa. Tali sono, infatti, le motivazioni principali che conducono alla definizione di un C^* -dynamical system⁷.

Un C^* -dynamical system è una tripla (\mathcal{A}, G, α) dove \mathcal{A} è una C^* -algebra, G è un gruppo localmente compatto, e $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$ assegna ad ogni elemento del gruppo G uno *-automorfismo di \mathcal{A} , in modo che siano verificate

⁶Richiederemo che \mathcal{M} sia di Hausdorff e (localmente) compatto.

⁷Gli C^* -dynamical systems sono noti e studiati in matematica indipendentemente dalle precedenti motivazioni.

5.5. Sistemi Dinamici e Derivazioni.

le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}\alpha_e &= id, \\ \alpha_{g_1}\alpha_{g_2} &= \alpha_{g_1g_2}, \quad \forall g_1, g_2 \in G\end{aligned}$$

dove e è l'identità del gruppo G , id è la mappa identica su \mathcal{A} , ed abbiamo usato la notazione $\alpha_g \equiv \alpha(g)$. Inoltre, α è tale che la mappa $g \rightarrow \alpha_g(A)$ è continua in norma per ogni $A \in \mathcal{A}$.

Si sarà notato che nella definizione precedente abbiamo sostituito all'intervallo di variabilità T un arbitrario gruppo G : tale generalizzazione non è fine a se stessa, in quanto permette di studiare in forma algebrica, oltre all'evoluzione temporale di un sistema fisico, anche le sue simmetrie. Per la (5.5.2), infatti, *ogni* simmetria, cioè ogni trasformazione in sé dello spazio degli stati \mathcal{M} , agisce sull'algebra $C(\mathcal{A})$ mediante *-automorfismi.

È interessante inoltre notare che la definizione di C^* -dynamical system non fa riferimento alla commutatività dell'algebra \mathcal{A} , ed è quindi adatta ad una generalizzazione dei sistemi dinamici al caso non commutativo, e quindi a sistemi quantistici con finiti o infiniti gradi di libertà. L'approccio e le definizioni finora illustrate possono sembrare astratte e artificiali: è interessante, invece, osservare come esse traggono spunto proprio dalla meccanica quantistica ordinaria. È noto, infatti, che in meccanica quantistica l'evoluzione di un sistema indipendente dal tempo con operatore hamiltoniano H può essere descritta in due "picture" equivalenti. Da un lato sono i vettori di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} ad evolversi secondo l'equazione

$$\psi_t = U(t)\psi \tag{5.5.3}$$

dove l'operatore unitario $U(t) = e^{iHt}$. D'altro lato si può scegliere di far evolvere gli osservabili secondo

$$A_t = U(t)AU^\dagger(t) \tag{5.5.4}$$

È facile vedere, a questo punto, che l'evoluzione dinamica degli osservabili è stabilita da una mappa

$$t \in \mathbb{R} \rightarrow U(t)(\cdot)U^\dagger(t)$$

che assegna ad ogni t uno *-automorfismo della C^* -algebra che contiene gli osservabili del sistema, e riconduce la descrizione dinamica al caso precedente.

Supponiamo a questo punto di voler studiare un sistema fisico caratterizzato

da un'assegnata C^* -algebra \mathcal{A} , e che abbia come gruppo di simmetrie un gruppo G che soddisfa le caratteristiche precedenti. In meccanica quantistica sappiamo, grazie al teorema di Wigner, che è possibile rappresentare tale gruppo G mediante operatori unitari (o antiunitari) che agiscono sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} , e di conseguenza sugli osservabili mediante le relazioni (5.5.4), con t sostituito da un elemento g del gruppo G . Quali rappresentazioni dell'algebra \mathcal{A} e del gruppo G sul medesimo spazio di Hilbert \mathcal{H} dobbiamo scegliere affinché quanto detto precedentemente sia implementato? A tale scopo diamo la seguente definizione:

Una rappresentazione covariante di un sistema dinamico è una tripla (\mathcal{H}, π, U) , dove \mathcal{H} è uno spazio di Hilbert, π è una rappresentazione dell'algebra su \mathcal{H} , e U è una rappresentazione unitaria fortemente continua di G su \mathcal{H} tale che

$$\pi(\alpha_g(A)) = U_g \pi(A) U_g^\dagger \quad (5.5.5)$$

La definizione precedente semplicemente sancisce la compatibilità tra le rappresentazioni di un'algebra \mathcal{A} e l'azione del gruppo G su \mathcal{A} .

Si può immaginare, quindi, quanto sia importante, soprattutto per le applicazioni alla fisica, la ricerca delle rappresentazioni covarianti di un determinato sistema dinamico. A tale proposito, nella prossima sezione mostreremo come associare ad ogni sistema dinamico una C^* -algebra, le cui rappresentazioni non degeneri sono in corrispondenza biunivoca con le rappresentazioni covarianti del sistema dinamico di partenza.

5.5.2 Crossed Products.

Ad ogni C^* -dynamical system (\mathcal{A}, G, α) è possibile associare una particolare C^* -algebra definita nella maniera seguente.

Essendo G un gruppo localmente compatto⁸, esso ammette una *misura invariante sinistra*, ovvero una misura μ_G tale che

$$\mu_G(g \cdot E) = \mu_G(E) \quad (5.5.6)$$

dove E è un insieme di Borel di G , g è un elemento di G , e $g \cdot E$ indica l'azione di g per moltiplicazione sinistra sull'insieme E . Tale misura, inoltre, è unica a meno di un fattore costante. Si considerino a questo punto le funzioni continue f dal gruppo G all'algebra \mathcal{A} che siano a supporto compatto:

⁸Per semplicità considereremo nel seguito gruppi localmente compatti con funzione modulare 1.

5.5. Sistemi Dinamici e Derivazioni.

indicheremo tale insieme con $C_c(G, \mathcal{A})$. Su tale insieme è possibile definire una struttura di spazio lineare in maniera naturale mediante la somma puntuale, ma il prodotto va definito diversamente come

$$(x * y)(g) \equiv \int_G x(h) \alpha_h(y(h^{-1}g)) \mu_G(h) \quad (5.5.7)$$

Osserviamo che nel caso $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, $G = \mathbb{R}$ e $\alpha_h = id$ per ogni h , la definizione precedente si riduce all'usuale convoluzione tra funzioni. Si può definire una involuzione $(\cdot)^*$ come

$$x^*(g) \equiv \alpha_g(x(g^{-1}))^* \quad (5.5.8)$$

e una norma $\|\cdot\|_1$

$$\|x\|_1 \equiv \int_G \|x(h)\| \mu_G(h) \quad (5.5.9)$$

Se si considera il completamento $L_1(G, \mathcal{A})$ di $C_c(G, \mathcal{A})$ rispetto a tale norma si ottiene una *-algebra di Banach. In generale, però, tale algebra *non* è una C^* -algebra: a tale proposito, si introduce una nuova norma su $L_1(G, \mathcal{A})$. Si definisca

$$\|x\| \equiv \sup_{\pi} \|\pi(x)\| \quad (5.5.10)$$

dove π varia su tutte le rappresentazioni di $L_1(G, \mathcal{A})$ su di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} .

Il lettore avrà notato che tale tecnica di costruzione di una C^* -norma è *la stessa* utilizzata nella sezione (5.3) per l'algebra dei polinomi \mathcal{P}^σ . Osserviamo, però, che \mathcal{P}^σ era una *-algebra, e non una *-algebra di Banach, il che conduceva alla possibilità che la norma definita in (5.3.1) potesse essere infinita per qualche x . Nel caso di $L_1(G, \mathcal{A})$ tale problema non sussiste: ogni rappresentazione π di un'algebra \mathcal{A} su di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} induce un omomorfismo tra l'algebra \mathcal{A} ed una sottoalgebra di operatori limitati su \mathcal{H} . Essendo $L_1(G, \mathcal{A})$ un'algebra di Banach, per ogni rappresentazione π varrà la disuguaglianza (2.2.5), che ci garantisce che la (5.5.10) è una norma⁹ ben definita per ogni x . Il completamento di $L_1(G, \mathcal{A})$ nella norma $\|\cdot\|$ è una

⁹In questo caso la (5.5.10) definisce una vera norma, e non una seminorma, poichè si può mostrare che $L_1(G, \mathcal{A})$ ha rappresentazioni fedeli.

5.5. Sistemi Dinamici e Derivazioni.

C^* -algebra, che viene chiamata *crossed product*, e viene indicata con

$$C^*(\mathcal{A}, G) = \mathcal{A} \rtimes_{\alpha} G \quad (5.5.11)$$

In verità, noi abbiamo già incontrato una C^* -algebra ottenuta mediante *crossed product*, anche se non è stata presentata diversamente: il toro non-commutativo. Una maniera alternativa, infatti, di costruire il toro non-commutativo è considerare *crossed product*

$$C(\mathbb{T}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z} \quad (5.5.12)$$

dove \mathbb{Z} agisce mediante traslazioni sul cerchio di un multiplo intero di un angolo irrazionale θ . A tale proposito, si veda [Rie81].

Alla fine della sezione precedente abbiamo accennato al fatto che tutte le rappresentazioni covarianti di un sistema dinamico sono ottenibili a partire dal *crossed product* associato e viceversa. Infatti, data una rappresentazione covariante (\mathcal{H}, π, U) di (\mathcal{A}, G, α) , si può costruire una rappresentazione di $\mathcal{A} \rtimes_{\alpha} G$ come

$$\rho(x) \equiv \int_G \pi(x(h))U(h)\mu_G(h), \quad x \in L_1(G, \mathcal{A}) \quad (5.5.13)$$

Infatti, abbastanza agevolmente si mostra che

$$\begin{aligned} \rho(x * y) &= \int_G \pi \left(\int_G x(h)\alpha_h(y(h^{-1}g))\mu_G(h) \right) U(g)\mu_G(g) \\ &= \int_G \int_G \pi(x(h))U(h)\pi(y(h^{-1}g))U^{\dagger}(h)\mu_G(h)U(g)\mu_G(g) \\ &= \int_G \int_G \pi(x(h))U(h)\pi(y(h^{-1}g))U(h^{-1}g)\mu_G(h)\mu_G(g) \\ &= \int_G \int_G \pi(x(h))U(h)\pi(y(h'))U(h')\mu_G(h)\mu_G(h') \\ &= \rho(x)\rho(y), \quad \forall x, y \in C^*(G, \mathcal{A}) \end{aligned} \quad (5.5.14)$$

e che inoltre ρ preserva l'involuzione. Viceversa, nota una rappresentazione ρ di $C^*(\mathcal{A}, G)$, si può ottenere una rappresentazione covariante (π, U) di (\mathcal{A}, G, α) per costruzione esplicita osservando che \mathcal{A} e G agiscono per moltiplicazione su $C^*(\mathcal{A}, G)$, e definendo quindi

$$\begin{aligned}\pi(A)\rho(x) &= \rho(Ax) \\ U(g)\rho(x) &= \rho(gx)\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}{}_Ax(h) &= Ax(h) \\ {}_gx(h) &= x(g^{-1}h)\end{aligned}$$

5.5.3 Derivazioni di una C^* -algebra.

Nella sezione (5.5.1) abbiamo visto come la dinamica di un sistema classico o quantistico possa essere descritto mediante un gruppo di trasformazioni che preservano la struttura degli osservabili del sistema in esame. In generale, però, la dinamica di un sistema così descritta non è la più *debole* possibile: in meccanica classica, ad esempio, si ritiene che le informazioni sulla dinamica siano codificate mediante un campo vettoriale sullo spazio delle configurazioni o delle fasi. La descrizione diventa così *infinitesima*, e soltanto in casi particolari si riconduce alla descrizione globale cui abbiamo accennato nelle precedenti sezioni. È lecito quindi chiedersi: qual è l'analogo noncommutativo di un campo vettoriale su di una varietà differenziabile? Quali sono i requisiti affinché “provenga”, in un senso che andrà precisato, da un gruppo di trasformazioni degli osservabili?

Inoltre, nella sezione precedente abbiamo tacitamente assunto di descrivere sistemi fisici i cui stati si evolvessero con continuità nel tempo: nel caso di sistemi quantistici con infiniti gradi di libertà, ad esempio, possono avvenire complicati fenomeni statistici, quali transizioni di fase o dissipazione, che non permettono in generale una tale descrizione.

Questi ed altri motivi, tra i quali la possibilità di studiare teorie di campo su spazi noncommutativi, hanno stimolato e stimolano ancora fisici e matematici alla ricerca e alla classificazione delle derivazioni di una C^* -algebra, e in generale di algebre di operatori. Sebbene una trattazione sufficientemente completa ed esauriente della teoria delle derivazioni su C^* -algebre non è proponibile in questa sede, vogliamo introdurre alcuni concetti e qualche risultato in modo da inquadrare il problema al meglio possibile, per cercare

5.5. Sistemi Dinamici e Derivazioni.

di utilizzare quanto illustrato nel seguito al caso dell'algebra \mathcal{B}_θ precedentemente studiata.

Diamo qualche definizione, rimandando a [Bra86] e a [Sak91] per le prove dei teoremi enunciati.

Una derivazione(simmetrica) δ di una C^* -algebra \mathcal{A} è un operatore lineare da una sotto*-algebra $\mathcal{D}(\delta)$ densa di \mathcal{A} , il dominio di δ in \mathcal{A} , soddisfacente le proprietà

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) \quad (5.5.15)$$

$$\delta(x^*) = \delta(x)^*, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(\delta) \quad (5.5.16)$$

Una derivazione simmetrica¹⁰ δ si dirà *limitata* o *illimitata* se l'operatore lineare δ definito sullo spazio di Banach soggiacente l'algebra \mathcal{A} è rispettivamente limitato o illimitato in norma. Com'è ovvio aspettarsi, la teoria delle derivazioni limitate è molto più sviluppata della teoria delle derivazioni illimitate, in quanto queste ultime sono estremamente più complicate da trattare, anche se molto spesso sono più adatte per le applicazioni. Poichè nel seguito tratteremo quasi esclusivamente derivazioni simmetriche, ometteremo quest'ultimo aggettivo.

Un esempio molto importante di derivazione limitata in una C^* -algebra \mathcal{A} è dato da

$$\delta_A(x) \equiv [A, x], \quad \forall x \in \mathcal{A} \quad (5.5.17)$$

il cui dominio $\mathcal{D}(\delta_A)$ è tutta l'algebra \mathcal{A} . Come vedremo in seguito, l'ovunque definibilità di una derivazione e la sua limitatezza sono strettamente collegate.

Un'altro esempio di derivazione, in generale non limitata, è dato dal generatore infinitesimo di un gruppo ad un parametro α_t di *-automorfismi della C^* -algebra \mathcal{A} fortemente continuo, che è definito come

$$\delta(x) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\alpha_t(x) - x) \quad (5.5.18)$$

$$\mathcal{D}(\delta) \equiv \left\{ x \in \mathcal{A} : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(\alpha_t(x) - x) \text{ esiste in norma} \right\}$$

Si può dimostrare che la (5.5.18) definisce una derivazione limitata *se e soltanto se* il gruppo ad un parametro α_t è continuo in norma.

¹⁰Le derivazioni simmetriche vengono anche chiamate **-derivazioni*.

5.5. Sistemi Dinamici e Derivazioni.

Una derivazione δ si dirà *chiusa* se si verifica che per ogni successione $\{x_n\} \in \mathcal{D}(\delta)$ convergente ad $x \in \mathcal{A}$ e tale che $\delta(x_n)$ converge a $y \in \mathcal{A}$ si ha che $x \in \mathcal{D}(\delta)$ e $\delta(x) = y$; la derivazione δ si dirà *chiudibile* se per ogni successione $\{x_n\} \in \mathcal{D}(\delta)$ convergente a 0 e tale che $\delta(x_n)$ converge a $y \in \mathcal{A}$ si ha che $\delta(y) = 0$. Ogni derivazione δ chiudibile può essere estesa ad un derivazione $\bar{\delta}$, chiamata *chiusura*, il cui dominio $\mathcal{D}(\bar{\delta})$ è definito come l'insieme degli $x \in \mathcal{A}$ tali $x = \lim_n x_n$, $x_n \in \mathcal{D}(\delta)$ e tali che esiste $y = \lim_n \delta(x_n)$: si ha quindi

$$\bar{\delta}(x) = y \tag{5.5.19}$$

A questo punto, riportiamo nel seguito uno dei risultati più importanti nel campo delle derivazioni limitate, dimostrato da Sakai negli anni 70.

Teorema *Sia \mathcal{A} una C^* -algebra e sia δ una derivazione non necessariamente simmetrica su \mathcal{A} tale che $\mathcal{D}(\delta) = \mathcal{A}$: allora δ è una derivazione limitata.*

Tale teorema rappresenta una sorta di generalizzazione alle derivazioni del teorema di Hellinger-Töeplitz, che impedisce che un operatore illimitato chiuso densamente definito possa essere esteso a tutto uno spazio di Hilbert. Introduciamo ora due definizioni molto importanti per le derivazioni limitate e illimitate rispettivamente:

Sia \mathcal{A} una C^ -algebra con unità¹¹. Una derivazione δ si dirà interna se esiste un elemento h autoaggiunto di \mathcal{A} tale che*

$$\delta(x) = i[h, x], \quad \forall x \in \mathcal{D}(\delta) \tag{5.5.20}$$

Essendo la mappa $i[h, \cdot]$ continua su $\mathcal{D}(\delta)$, essa si può estendere a tutta l'algebra \mathcal{A} : nel seguito, quindi, intenderemo che ogni derivazione interna è definita sull'intera algebra.

Osservazione *La definizione precedente è molto importante anche da un punto di vista fisico. Nella trattazione ordinaria della meccanica quantistica, infatti, la struttura simplettica della teoria è rappresentata dal commutatore tra operatori: la condizione (5.5.20) corrisponde così all'hamiltonianità di un campo vettoriale classico.*

Una derivazione δ si dirà approssimativamente interna se esiste una succes-

¹¹La definizione seguente vale anche nel caso in cui \mathcal{A} non posseda un'unità. In questo caso l'elemento h apparterrà all'algebra dei moltiplicatori $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, che nel caso di un'algebra \mathcal{A} con un'unità coincide con \mathcal{A} stessa.

5.5. Sistemi Dinamici e Derivazioni.

sione $\{h_n\}$ di elementi autoaggiunti di \mathcal{A} tale che

$$\delta(x) \equiv \lim_n i[h_n, x], \quad \forall x \in \mathcal{D}(\delta) \quad (5.5.21)$$

In particolari C^* -algebre, le definizioni precedenti costituiscono il “prototipo” delle derivazioni limitate, in quanto vale il seguente risultato

Sia \mathcal{A} una C^ -algebra semplice con unità: allora per ogni derivazione simmetrica δ tale che $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ si ha*

$$\delta(x) = i[h, x], \quad \forall x \in \mathcal{A} \text{ e } \|\delta\| = \|h\| \quad (5.5.22)$$

dove h è un elemento positivo di \mathcal{A} .

È chiaro, a questo punto, che lo studio delle derivazioni limitate è molto facilitato dai risultati precedenti, che ne permettono, in generale, una completa classificazione. Molto più difficile e articolato risulta essere invece lo studio delle derivazioni illimitate, che risultano, però, avere delle caratteristiche molto interessanti. Si è accennato all’inizio di questa sezione alla possibile generalizzazione dei campi vettoriali al caso noncommutativo: ora abbiamo gli strumenti per dare una risposta, sebbene parziale.

Si consideri una varietà compatta infinitamente differenziabile \mathcal{M} e sia $\mathcal{A} = C(\mathcal{M})$ e $\mathcal{D} = C^\infty(\mathcal{M})$: è noto che un campo vettoriale v su \mathcal{M} si può descrivere localmente mediante un operatore differenziale su \mathcal{D} nella seguente maniera

$$v_x = \sum_{i=1}^d f_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (5.5.23)$$

dove x^i costituisce un sistema di coordinate locali per \mathcal{M} , d è la dimensione della varietà, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ è la derivata parziale nella coordinate i -esima e le f_i sono funzioni continue nelle carte locali. Per quanto detto finora, è chiaro a questo punto che ogni campo vettoriale v rappresenta una derivazione $\delta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}$, che si può mostrare essere illimitata e chiusa (o chiudibile). L’aspetto interessante è però, a nostro avviso, che vale il risultato inverso: ogni derivazione a dominio \mathcal{D} sull’algebra delle funzioni continue su di una varietà è un campo vettoriale e si può porre nella forma (5.5.23). La naturale estensione dei campi vettoriali al caso di uno spazio noncommutativo sembra così essere la nozione di derivazione: va da sé che anche le usuali derivate parziali rientrano in questa categoria. Quest’ultimo aspetto, poi, è particolarmente importante se si è interessati allo studio di teorie di campo, in quanto la conoscenza delle

5.5. Sistemi Dinamici e Derivazioni.

derivazioni permette di scrivere un'azione in forma algebrica, facilmente generalizzabile al caso di uno spazio noncommutativo.

Una precisazione a questo punto è necessaria. Si potrebbe pensare, alla luce delle considerazioni precedenti, di definire come varietà noncommutativa una coppia (A, \mathcal{D}) , dove A è una C^ -algebra, che codificherebbe la topologia della varietà, e \mathcal{D} è una sotto- $*$ algebra densa con proprietà aggiuntive, che invece specificherebbe la struttura differenziabile. Quali siano queste proprietà aggiuntive non è tuttora molto chiaro: ciò è dovuto, a nostro avviso, soprattutto al fatto che già nel caso di uno spazio commutativo K non è noto se dall'esistenza di una derivazione simmetrica chiusa su $C(K)$ si possa concludere che lo spazio K abbia una struttura differenziabile unidimensionale.*

Lo studio delle derivazioni chiuse (o chiudibili) su una C^* -algebra, a cui appartengono le derivate parziali nelle coordinate su di una varietà differenziabile, si presenta molto interessante, in quanto è nota una classificazione per particolari algebre, tra cui gli operatori compatti e le algebre AF.

Nel caso dell'algebra $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ degli operatori compatti su di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , si ha infatti che per ogni derivazione δ chiudibile esiste un operatore antisimmetrico H , cioè tale che $H \subseteq -H^*$, e tale che

$$\delta \subseteq [H, \cdot]$$

dove con $A \subseteq B$ abbiamo indicato che l'operatore B estende l'operatore A . Non dimostreremo tale teorema, in quanto la prova non è banale e richiede tecniche che qui non abbiamo illustrato. Preferiamo invece soffermarci sulla classificazione delle derivazioni chiuse di un'algebra AF.

Sia \mathcal{A} una C^* -algebra AF ed indichiamo con $\{\mathcal{A}_n\}$ una generica successione di sottoalgebre approssimanti. Consideriamo inoltre una derivazione chiusa su \mathcal{A} con dominio $\mathcal{D}(\delta)$ denso in \mathcal{A} . Si può mostrare allora che esiste sempre una successione di algebre approssimanti $\{\mathcal{A}_n\}$ tale che

$$\cup_n \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{D}(\delta) \tag{5.5.24}$$

ed inoltre che

$$\delta(x) = i[h_n, x], \quad \forall x \in \mathcal{A}_n \tag{5.5.25}$$

dove $\{h_n\}$ è una successione di elementi tali che $h_n \in \mathcal{A}_n$ e $h_n^* = h_n$. La successione $\{h_n\}$ si può costruire esplicitamente nella seguente maniera: si considera un sistema di matrix units per \mathcal{A}_n $\{e_{ij}\}_{i,j}$, e cioè un insieme di elementi e_{ij} di \mathcal{A}_n tale che le combinazioni lineari degli e_{ij} costituiscono l'intera

5.6. Derivazioni del Toro Noncommutativo.

algebra, e che verificano

$$e_{ij}e_{sq} = \delta_{js}e_{iq} \quad (5.5.26)$$

$$e_{ij}^* = e_{ji} \quad (5.5.27)$$

e dove gli indici $i, j = 1, \dots, d_n$, con d_n dimensione dell'algebra \mathcal{A}_n . L'elemento h_n sarà allora dato da

$$h_n \equiv \frac{1}{i} \sum_{i=1}^{d_n} \delta(e_{i1})e_{1i} \quad (5.5.28)$$

L'aspetto importante della precedente classificazione è che l'equazione (5.5.25) permette di affermare che *ogni derivazione chiusa di un'algebra AF è approssimativamente interna*: nel seguito vedremo l'importanza di tale risultato per lo studio delle algebre \mathcal{B}_θ . A tale proposito, nella prossima sezione discuteremo qualche risultato sulle derivazioni sull'algebra del toro noncommutativo.

5.6 Derivazioni del Toro Noncommutativo.

Ricordiamo dalla sezione 3.7 che \mathcal{A}_θ indica la sottoalgebra densa del toro noncommutativo costituita dagli elementi della forma (3.7.7), mentre l'algebra del toro verrà indicata da $\overline{\mathcal{A}}_\theta$.

Consideriamo dapprima il caso commutativo, in cui $\mathcal{A}_0 = C^\infty(\mathbb{T}^2)$ e $\overline{\mathcal{A}}_0 = C(\mathbb{T}^2)$. Scelto un sistema di coordinate locali (θ, φ) , $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$, possiamo definire su $\overline{\mathcal{A}}_0$ le seguenti derivazioni simmetriche

$$\delta_1(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \delta_2(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (5.6.1)$$

dove $\mathcal{D}(\delta_1) = \mathcal{D}(\delta_2) = \mathcal{A}_0$. È facile vedere che sui generatori U e V le derivazioni δ_1 e δ_2 agiscono come

$$\delta_1(U) = iU, \quad \delta_2(V) = 0 \quad (5.6.2)$$

$$\delta_2(U) = 0, \quad \delta_2(V) = iV \quad (5.6.3)$$

È noto in geometria differenziale che il toro è una varietà *parallelizzabile*, e cioè che ogni campo vettoriale v sul toro si può esprimere localmente come un operatore differenziale su \mathcal{A}_0 nella seguente maniera

$$v(f) = g_1(\theta, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \theta} + g_2(\theta, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

5.6. Derivazioni del Toro Noncommutativo.

dove $g_1(\theta, \varphi)$ e $g_2(\theta, \varphi)$ sono funzioni continue sul toro. Ricordando quanto visto nella sezione precedente, ciò si può parafrasare algebricamente¹² dicendo che ogni derivazione δ con $\mathcal{D}(\delta) = \mathcal{A}_0$ è della forma

$$\delta = a\delta_1 + b\delta_2 \quad (5.6.4)$$

dove a, b appartengono ad $\overline{\mathcal{A}}_0$, e, nel caso di derivazioni simmetriche, sono autoaggiunti.

Si può mostrare agevolmente, inoltre, che le derivazioni δ_1 e δ_2 sono i *generatori*, nel senso della definizione (5.5.18), del gruppo delle traslazioni bidimensionali che agisce sul toro, ed in quanto tali sono chiuse (o chiudibili).

La situazione cambia radicalmente quando il toro è noncommutativo. Sebbene le derivazioni δ_1 e δ_2 possano essere estese e definite algebricamente su \mathcal{A}_θ , *non* è più vero che ogni derivazione sul toro è della forma (5.6.4). Per convincersene, si consideri una qualsiasi derivazione δ e sia $a\delta$ un operatore su $\overline{\mathcal{A}}_\theta$ definito naturalmente come

$$(a\delta)(b) = a\delta(b), \quad \forall b \in \mathcal{D}(\delta) \quad (5.6.5)$$

È immediato verificare a questo punto che

$$(a\delta)(bc) = a\delta(bc) = a\delta(b)c + ab\delta(c), \quad \forall b, c \in \mathcal{D}(\delta) \quad (5.6.6)$$

e cioè che l'operatore $a\delta$ *non verifica* la regola di Leibnitz, ovvero la condizione (5.5.15). Tuttavia, si può rendere l'operatore $a\delta$ una derivazione simmetrica richiedendo prima di tutto che $a^* = a$, ed inoltre che $[a, b] = 0$, per qualsiasi $b \in \overline{\mathcal{A}}_\theta$ ¹³. Inoltre alla relazione (5.6.4) si sostituisce un'interessante proprietà delle derivazioni sul toro noncommutativo. Si può mostrare[BEJ84], infatti, che ogni derivazione δ simmetrica sul toro si può decomporre in maniera unica come

$$\delta = a\delta_1 + b\delta_2 + \tilde{\delta} \quad (5.6.7)$$

dove δ_1 e δ_2 sono le derivazioni che abbiamo definito precedentemente, a e b sono elementi autoaggiunti che commutano con $\overline{\mathcal{A}}_\theta$, e $\tilde{\delta}$ è una derivazione *approssimativamente interna*. Come vedremo in seguito, ciò risulterà essere molto importante per lo studio di derivazioni sull'orbifold toroidale \mathcal{B}_θ .

¹²In un linguaggio tecnico, diremmo che le derivazioni sul toro sono un *modulo* finito e libero sull'algebra $\overline{\mathcal{A}}_0$.

¹³In verità, come si nota dall'equazione (5.6.6), basterebbe che a commutasse con tutti gli elementi di $\mathcal{D}(\delta)$: se il dominio $\mathcal{D}(\delta)$ è denso, come nel nostro caso, si ha automaticamente che a commuta con l'intera algebra.

5.7 Derivazioni di \mathcal{B}_θ .

Il presente approccio allo studio delle derivazioni sull'algebra \mathcal{B}_θ è motivato da una procedura, detta di *riduzione*, relativamente nota in meccanica classica. Assegnato un campo vettoriale Γ , che descrive la dinamica del sistema, su di una varietà differenziabile \mathcal{M} , che invece rappresenta lo spazio di supporto, è spesso utile e fruttuoso capire se Γ può essere ristretto ad una sottovarietà o ad un quoziente \mathcal{N} di \mathcal{M} rispetto ad una determinata relazione di equivalenza. Quest'ultimo caso, poi, ci interessa particolarmente, in quanto, nel caso commutativo, l'algebra \mathcal{B}_0 è associata ad un quoziente del toro rispetto alla trasformazione (5.1.5). L'aspetto interessante è che tale procedura di riduzione classica può essere "dualizzata" utilizzando l'algebra delle funzioni continue su \mathcal{M} , il che la rende generalizzabile abbastanza agevolmente al caso noncommutativo [GLMV94]. L'idea è quella di riguardare, come abbiamo imparato precedentemente, un campo vettoriale Γ come una derivazione sull'algebra \mathcal{F} delle funzioni continue su \mathcal{M} , mentre la sottovarietà o il quoziente \mathcal{N} come sottoalgebra \mathcal{F}_Σ di \mathcal{F} . Indicata con $\pi_\Sigma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_\Sigma$ la proiezione naturale ottenuta dall'immersione di \mathcal{F}_Σ in \mathcal{F} , cercheremo una derivazione Γ_Σ della sottoalgebra \mathcal{F}_Σ tale che¹⁴

$$\pi_\Sigma(\Gamma(f)) = \Gamma_\Sigma(\pi_\Sigma(f)), \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad (5.7.1)$$

Se esiste la derivazione Γ_Σ , diremo che Γ_Σ è la *riduzione* di Γ .

A questo punto, la nostra idea per la costruzione di derivazioni dell'algebra \mathcal{B}_θ si basa sul riguardare tale algebra come sottoalgebra del toro noncommutativo, cercando di ridurre, in qualche maniera, le derivazioni del toro, che come abbiamo visto sono note e studiate, a derivazioni di \mathcal{B}_θ .

Il primo passo utile per la definizione di una derivazione δ su \mathcal{B}_θ è quello di definire l'azione di δ sui generatori A e B , in modo tale da potere in seguito estendere δ a tutte le combinazioni finite di elementi del tipo (5.2.27) e (5.2.28) mediante linearità e regola di Leibnitz. Otterremo così che δ sarà definita su di un dominio $\mathcal{D}(\delta)$ denso¹⁵ in \mathcal{B}_θ che dovremo studiare in seguito. Inoltre, affinché l'immagine del dominio $\mathcal{D}(\delta)$ sia ancora contenuta in \mathcal{B}_θ , dovremo richiedere che

$$\sigma(\delta(a)) = \delta(a), \quad \forall a \in \mathcal{D}(\delta) \quad (5.7.2)$$

¹⁴In verità, per derivazioni illimitate stiamo sottointendendo che $\pi_\Sigma(\mathcal{D}(\Gamma)) \subseteq \mathcal{D}(\Gamma_\Sigma)$.

¹⁵La densità del dominio è immediata, in quanto per costruzione la *-sottoalgebra \mathcal{P}^σ dei polinomi in A e B invarianti è densa in \mathcal{B}_θ .

5.7. Derivazioni di \mathcal{B}_θ .

Come abbiamo visto nella sezione precedente, ogni derivazione del toro si può decomporre unicamente in una parte illimitata δ_0 , combinazione delle derivazioni δ_1 e δ_2 , e in una parte approssimativamente interna $\tilde{\delta}$: nel seguito ci concentreremo su derivazioni del toro del tipo δ_0 .

Per i criteri espressi precedentemente, è immediato verificare che le derivazioni δ_1 e δ_2 *non* sono derivazioni dell'algebra \mathcal{B}_θ : infatti, ricordando dalla sezione (5.2) che $A = U + U^\dagger$ e $B = V + V^\dagger$, e le relazioni (5.6.2) e (5.6.3) si ha per δ_1 che¹⁶

$$\delta_1(A) = i(U - U^\dagger) \quad (5.7.3)$$

$$\delta_1(B) = 0 \quad (5.7.4)$$

Per le relazioni (5.1.3), è evidente che $\delta_1(A)$ non è flip invariante, e quindi non appartiene all'algebra \mathcal{B}_θ ; tuttavia, $\delta_1(A)$ mostra una certa “regolarità” rispetto al flip, nel senso che

$$\sigma(\delta_1(A)) = -i(U - U^\dagger) = -\delta_1(A) \quad (5.7.5)$$

Tale caratteristica di δ_1 è estremamente interessante, in quanto permette la seguente costruzione. Si consideri l'operatore lineare $a\delta_1$ definito nella maniera usuale, e con a elemento dell'algebra del toro tale che

$$\sigma(a) = -a \quad (5.7.6)$$

È immediato a questo punto verificare le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned} \sigma(a\delta_1(A)) &= \sigma(a)\sigma(\delta_1(A)) \\ &= (-a)(-\delta_1(A)) \\ &= a\delta_1(A) \end{aligned}$$

Possiamo così, ricalcando le linee del discorso della sezione precedente, pensare di implementare la regola di Leibnitz per $a\delta_1$ scegliendo a in modo che $[a, b] = 0, \forall b \in \mathcal{B}_\theta$, mentre la simmetria della derivazione si ottiene richiedendo che $a^* = a$. Riassumendo, abbiamo ottenuto che *tutte* le derivazioni del toro della forma

$$a\delta_1 + b\delta_2 \quad (5.7.7)$$

¹⁶I discorsi che seguiranno sono applicabili anche alla derivazione δ_2 .

5.7. Derivazioni di \mathcal{B}_θ .

con a e b elementi autoggiunti appartenenti al *centro*¹⁷ dell'algebra \mathcal{B}_θ e tali che $\sigma(a) = -a$, $\sigma(b) = -b$ sono derivazioni dell'algebra \mathcal{B}_θ su di un'opportuno dominio $\mathcal{D}(\delta) \subseteq \mathcal{B}_\theta$. A questo punto ci poniamo la seguente domanda: esistono elementi dell'algebra del toro con le caratteristiche richieste precedentemente, e cioè l'insieme

$$\{a \in \overline{\mathcal{A}_\theta} : \sigma(a) = -a, a^* = a, [a, b] = 0, \forall b \in \mathcal{B}_\theta\} \quad (5.7.8)$$

è diverso dall'insieme vuoto?

La situazione cambia drasticamente nel caso in cui θ sia razionale o irrazionale.

Supponiamo dapprima che $\theta = \frac{p}{q}$ con p e q interi relativamente primi: allora si può mostrare che un'elemento a della forma

$$a = \sum_n a_n (U^{nq} - U^{-nq}) \quad (5.7.9)$$

con a_n immaginari puri, ha le caratteristiche richieste. È facile verificare che a è autoggiunto, è tale che $\sigma(a) = -a$, ed inoltre commuta con tutti gli elementi del toro, e quindi dell'algebra \mathcal{B}_θ . Quest'ultima proprietà si mostra immediatamente se si tiene presente che

$$\begin{aligned} U^q V &= e^{2\pi i \theta q} V U^q \\ &= e^{2\pi i p} V U^q \\ &= V U^q \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

Ovviamente un elemento b della forma

$$b = \sum_n b_n (V^{nq} - V^{-nq}) \quad (5.7.11)$$

soddisfa anch'esso alle caratteristiche richieste. Il nostro metodo ci ha permesso così di costruire una famiglia di derivazioni dell'algebra \mathcal{B}_θ della forma (5.7.7), i cui parametri sono elementi dell'algebra del tipo (5.7.9) e (5.7.11).

¹⁷In verità il termine *centro* è fuorviante, perché è chiaro che a e b non appartengono all'algebra \mathcal{B}_θ .

5.8 Possibili sviluppi ulteriori

Un possibile sviluppo nello studio dell'algebra \mathcal{B}_θ che ci è stato suggerito proprio dal metodo precedentemente illustrato è il seguente. Le derivazioni da noi costruite provengono essenzialmente da derivazioni illimitate δ dell'algebra del toro a cui abbiamo modificato il dominio $\mathcal{D}(\delta)$, in modo che il nuovo dominio $\mathcal{D}'(\delta) \subseteq \mathcal{B}_\theta$. Inoltre, abbiamo scelto di concentrarci su derivazioni che non fossero approssimativamente interne su $\mathcal{D}(\delta)$: sembra ragionevole pensare, a questo punto, che tali derivazioni *non* siano approssimativamente interne su $\mathcal{D}'(\delta)$. Mostrando che la derivazione δ è chiusa sul dominio $\mathcal{D}'(\delta)$, si dimostrerebbe che le algebre θ , nel caso razionale, *non possono essere* AF. La presenza di una siffatta derivazione chiusa δ , infatti, contraddice la classificazione delle derivazioni chiuse e simmetriche delle algebre AF cui abbiamo accennato nella sezione (5.5.3). Il punto di partenza è la seguente osservazione. Si consideri il caso in cui θ è irrazionale: è noto che in tale situazione sia il toro noncommutativo che la sottoalgebra \mathcal{B}_θ sono algebre *semplici*, cioè tali da non ammettere ideali bilateri propri. Si può mostrare che in un'algebra semplice con unità l'insieme degli elementi che commutano con tutta l'algebra è costituito dai soli multipli dell'identità. A questo punto si sarebbe condotti a pensare che l'insieme (5.7.8) sia vuoto, in quanto i multipli dell'identità sono elementi invarianti sotto il flip, e quindi *non* verificano $\sigma(a) = -a$. Tuttavia, tale conclusione non è esatta: sebbene, infatti, un elemento che commuta con l'intera algebra commuterà con una qualsiasi sottoalgebra, non è vero il contrario. Possono esistere, così, in linea di principio, elementi che commutano solo con \mathcal{B}_θ e non con $\overline{\mathcal{A}}_\theta$. Tuttavia, si può mostrare, utilizzando che le algebre $\overline{\mathcal{A}}_\theta$ e \mathcal{B}_θ sono semplici, che tali elementi sono necessariamente multipli dell'identità. Ciò vuol dire, a questo punto, che effettivamente l'insieme (5.7.8) è vuoto, o meglio è costituito dal solo 0, e che quindi il nostro metodo *non* è più applicabile, se non in maniera banale. Verificate le ipotesi sui domini, però, questo è quanto dovremmo aspettarci, in quanto nel caso irrazionale l'algebra \mathcal{B}_θ è AF, e quindi *non ammette* derivazioni del tipo da noi costruito. Tale prova si può ritenere, infine, come un necessario controllo di “coerenza” del nostro metodo.

Appendice A

Elementi di Topologia

In questa appendice richiamiamo alcune nozioni fondamentali sugli spazi topologici, rimandando ai testi citati in bibliografia per uno studio dettagliato.

Uno spazio topologico è una coppia (S, τ) , dove S è un insieme, e $\tau \equiv \{O_\lambda\}$ è una sottocollezione delle parti di S , i cui elementi vengono chiamati *aperti*, soddisfacente i seguenti assiomi:

- A1 Sia S che l'insieme vuoto \emptyset sono aperti.
- A2 L'unione di una numero *arbitrario* di aperti è un aperto.
- A3 L'intersezione di un numero *finito* di aperti è un aperto.

Un sottoinsieme $X \subset S$ verrà detto *chiuso* se il suo complemento in S è un insieme aperto. Equivalentemente si può definire una topologia su S assegnando la famiglia dei chiusi, che soddisferanno degli assiomi che in un certo senso sono duali dei precedenti. L'*interno* $\overset{\circ}{X}$ di un sottoinsieme $X \subset S$ è definito come l'unione di tutti gli aperti contenuti in X : analogamente, la chiusura \overline{X} è definita come l'intersezione di tutti i chiusi contenenti X . Risulta così che l'interno di un insieme X è il *più grande* aperto contenuto in X , mentre la chiusura è il *più piccolo* chiuso contenente X . Inoltre, un insieme è aperto (risp. chiuso) se e soltanto se coincide con il suo interno (risp. chiusura). Un sottoinsieme X si dirà *denso* in S se $\overline{X} = S$. Un punto p si dirà *punto di aderenza* di un sottoinsieme X di S se per qualsiasi aperto O contenente p si ha che $O \cap X \neq \emptyset$: si può mostrare che la chiusura di un insieme coincide con l'insieme dei suoi punti di aderenza. Assegnata una topologia è possibile definire la nozione di mappa *continua* tra spazi topologici: una mappa $f : (S_1, \tau_1) \rightarrow (S_2, \tau_2)$ si dirà *continua* se l'antimmagine $f^{-1}(O)$ è un aperto in S_1 per ogni O aperto in S_2 . Una mappa f si dirà *aperta* se l'immagine $f(O)$ è un aperto in S_2 per qualsiasi O aperto in S_1 . Nel caso in

cui f sia una mappa biunivoca continua con inversa continua, diremo che f è un *omeomorfismo*. Su di un insieme S è possibile in molti casi assegnare la topologia mediante un'operazione di chiusura [HY61], che consiste nell'assegnare ad ogni sottoinsieme X un altro sottoinsieme \overline{X} , chiamato chiusura, in modo che siano soddisfatti i seguenti assiomi di Kuratowski

- K1 Se X è l'insieme \emptyset o consiste di un singolo punto, allora $\overline{X} = X$.
- K2 Per qualsiasi coppia di sottoinsiemi X e Y , si ha che $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.
- K3 Per qualsiasi X , $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Si mostra che tali assiomi sono equivalenti ai precedenti, ma definiscono spazi topologici meno generali. Infatti, l'assioma K_1 impone che *ogni punto sia un insieme chiuso*, cosa che in generale non è verificata. Assegnate due topologie τ_1 e τ_2 su S , diremo che τ_1 è più *debole* di τ_2 (o che τ_2 è più *fine* di τ_1) se $\tau_1 \subset \tau_2$, cioè se ogni aperto di τ_1 è un aperto di τ_2 . In generale non è detto che due topologie su S siano confrontabili: si ha però che la topologia più debole è la *topologia triviale*, in cui gli unici aperti sono \emptyset e S , mentre la topologia più fine è la *topologia discreta*, in cui tutti i sottoinsiemi di S sono aperti. Diamo nel seguito alcune definizioni circa la possibilità di *separare* i punti di uno spazio topologico mediante insiemi aperti.

Uno spazio topologico S è detto T_0 se per qualsiasi coppia di punti x, y esiste almeno un aperto che contiene uno dei due ma non l'altro. In uno spazio T_0 possono esistere insiemi costituiti da un solo punto che non sono chiusi. Uno spazio topologico S è detto T_1 se per qualsiasi coppia di punti x, y esiste una coppia di aperti O_x, O_y tali che $x \in O_x$ e $y \notin O_x$, $y \in O_y$ e $x \notin O_y$. In tali spazi, si mostra, ogni insieme finito di punti è chiuso. Uno spazio S è detto T_2 o di *Hausdorff* se per ogni coppia di punti x, y esiste una coppia di aperti O_x, O_y che verificano le condizioni precedenti, con l'aggiunta che $O_x \cap O_y = \emptyset$. Il vantaggio di utilizzare spazi di Hausdorff risiede nel fatto che il punto limite di una successione convergente è unico.

Una famiglia di insiemi \mathcal{U} si dirà un *ricoprimento* di uno spazio topologico S se $S = \bigcup_{X \in \mathcal{U}} X$: il ricoprimento verrà detto *finito* se \mathcal{U} contiene un numero finito di insiemi. Uno spazio topologico si dirà *compatto* se da ogni ricoprimento di S costituito da aperti si può estrarre una sottocollezione finita di insiemi che costituisca ancora un ricoprimento di S . S si dirà *localmente compatto* se ogni punto x è contenuto in un aperto compatto nella topologia relativa. Sia $f : S_1 \rightarrow S_2$ una mappa continua tra due spazi compatti: f si dirà *propria* se l'antimmagine $f^{-1}(K)$ è un compatto in S_1 per ogni compatto K in S_2 . Uno spazio topologico S si dirà *separabile* se esiste un sottoinsieme X

numerabile denso in S . S sarà detto *primo numerabile* se per qualsiasi punto x esiste una famiglia numerabile di aperti $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $O_n \subset O_{n+1}$, e tali che per qualsiasi aperto Q contenente x esiste un n tale che $Q \subset O_n$. Uno spazio topologico S è detto *secondo numerabile* se ogni aperto di S si può ottenere come l'unione degli elementi di una famiglia numerabile di aperti. In generale, lo studio di uno spazio topologico S avviene analizzando come si comportano le funzioni continue da S in un altro spazio topologico, che di solito è \mathbb{R} o \mathbb{C} . A tale proposito, riportiamo nel seguito alcune notazioni e qualche risultato sulle funzioni continue a valori complessi. Si chiama *supporto* di una funzione f continua su di uno spazio topologico S la chiusura dell'insieme $K_f \equiv \{x \in S : f(x) \neq 0\}$: la funzione f si dirà a *supporto compatto* se K_f è compatto in \mathbb{C} . Una funzione f a valori complessi su di uno spazio topologico S localmente compatto e di Hausdorff si dirà *andare a zero all'infinito* se per qualsiasi $\epsilon > 0$ esiste un insieme compatto $K \subset S$ tale che $|f(x)| < \epsilon$ per qualsiasi $x \notin K$.

Uno spazio topologico S è *connesso* se non è l'unione di due aperti non vuoti e disgiunti. Equivalentemente, uno spazio topologico è connesso se e soltanto se gli unici insiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono l'insieme \emptyset ed S . Un sottoinsieme R di uno spazio topologico S si dirà una *componente* se C è connesso e non è contenuto in nessun altro sottoinsieme proprio e connesso: si può provare che ogni punto di S appartiene ad una componente.

Appendice B

Il Toro Noncommutativo nel Caso Razionale

Mostriamo il teorema enunciato in sezione 3.7 [GBVF00]

Teorema Sia $\theta = \frac{p}{q}$, con p e $q > 0$ relativamente primi. Allora \mathcal{A}_θ è isomorfa all'algebra delle sezioni di un fibrato vettoriale su T^2 , la cui fibra tipica è l'algebra $M_q(\mathbb{C})$.

Dim. Si considerino le seguenti matrici unitarie

$$\tilde{U} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{q-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{V} \equiv \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

chiamate rispettivamente *clock* e *shift*, e dove $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$. Tali matrici sono a traccia nulla, soddisfano $\tilde{U}^q = \mathbb{I}_q$, $\tilde{V}^q = \mathbb{I}_q$, e inoltre verificano $\tilde{U}\tilde{V} = \lambda\tilde{V}\tilde{U}$. Si consideri ora l'algebra infinito dimensionale $M_q(C(T^2)) \simeq C(T^2) \otimes M_q(\mathbb{C})$ delle matrici $q \times q$ a coefficienti nelle funzioni continue sul toro, ed il gruppo finito $H = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$ costituito da q^2 elementi. Si può costruire un'azione di H su $M_q(C(T^2))$ mediante

$$\alpha_{10}(f(z, w) \otimes A) \equiv f(z, \lambda^{-1}w) \otimes \tilde{U}A\tilde{U}^{-1} \quad (\text{B.2a})$$

$$\alpha_{01}(f(z, w) \otimes A) \equiv f(\lambda z, w) \otimes \tilde{V}A\tilde{V}^{-1} \quad (\text{B.2b})$$

dove z e w sono le funzioni coordinate sul toro. La moltiplicazione è rappresentata mediante la composizione delle trasformazioni precedenti. Gli elementi che restano invariati sotto l'azione di H costituiscono una sottoalgebra di $M_q(C(T^2))$ generata dagli elementi $u \equiv w \otimes \tilde{V}$ e $v \equiv z \otimes \tilde{U}$, che

verificano

$$(z \otimes \tilde{U})(w \otimes \tilde{V}) = \lambda(w \otimes \tilde{V})(z \otimes \tilde{U}) \quad (\text{B.3})$$

Tale sottoalgebra è quindi isomorfa a \mathcal{A}_θ . Si consideri ora il fibrato vettoriale triviale $E = \mathbb{T}^2 \times M_q(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}^2$ ed i seguenti isomorfismi

$$\tau_{10}(z, w; A) \equiv (z, \lambda^{-1}w; \tilde{U}A\tilde{U}^{-1}) \quad (\text{B.4a})$$

$$\tau_{01}(z, w; A) \equiv (\lambda z, w; \tilde{V}A\tilde{V}^{-1}) \quad (\text{B.4b})$$

che generano un'azione di \mathbb{H} su E libera e compatibile con la struttura di fibrato. È possibile a questo punto indurre un'azione di \mathbb{H} sulla base \mathbb{T}^2 ,

$$\tilde{g} \cdot x = \pi(g \cdot v_x), \quad \forall x \in \mathbb{T}^2, \forall v_x \in \pi^{-1}(x), \forall g \in \mathbb{H} \quad (\text{B.5})$$

e costruire un nuovo fibrato $F = E/\mathbb{H} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{T}^2/\mathbb{H} \simeq \mathbb{T}^2$, con fibra tipica $M_q(\mathbb{C})$ e con "twist" etichettato da p . Si può mostrare, in maniera non del tutto banale, che l'algebra delle sezioni (continue) di $(F, \tilde{\pi}, \mathbb{T}^2)$ è isomorfa all'algebra delle sezioni di (E, π, \mathbb{T}^2) che restano invariate sotto l'azione di \mathbb{H} , e cioè che verificano

$$\psi : \mathbb{T}^2 \rightarrow E : \quad \psi(x) = g \cdot \psi(\tilde{g}^{-1} \cdot x) \quad (\text{B.6})$$

Per quanto abbiamo visto precedentemente, tale algebra è isomorfa a \mathcal{A}_θ \square .

Appendice C

Una Dimostrazione

Proposizione *Sia θ irrazionale. Allora la C^* -norma $\|\cdot\|_0$ su $\mathcal{P}(A, B)$ coincide con la norma che $\mathcal{P}(A, B)$ ha come sottoalgebra di \mathcal{A}_θ , cioè l'algebra $C^*(A, B)$ è canonicamente isomorfa alla sottoalgebra \mathcal{B}_θ degli elementi invarianti sotto il flip σ .*

Dim. Dobbiamo mostrare, in base ad un risultato sugli stati di una C^* -algebra, che ogni stato ω su $C^*(A, B)$ si estende ad uno stato φ su $\mathcal{A}_\theta = C^*(U, V)$. A tale proposito, osserviamo che dato $\mathcal{P}_-^\sigma \equiv \{x \in \mathcal{P}(U, V) : \sigma(x) = -x\}$ si può mostrare che per qualsiasi $x \in \mathcal{P}(U, V)$ si ha un'unica decomposizione

$$x = x_+ + x_- \tag{C.1}$$

dove $x_+ \in \mathcal{P}(A, B)$ e $x_- \in \mathcal{P}_-^\sigma$. Inoltre, nel caso in cui θ è irrazionale, si ha che b^*b , per qualsiasi $b \in \mathcal{P}_-^\sigma$, è un elemento positivo di $C^*(A, B)$.

Si definisca allora

$$\varphi(x) = \omega(x_+) \tag{C.2}$$

È chiaro che φ è un funzionale lineare su $\mathcal{P}(U, V)$: per mostrare che φ è uno stato su $C^*(U, V)$ dobbiamo verificare che $\varphi(x^*x) \geq 0$, cioè per definizione

$$\omega(x_+^*x_+) + \omega(x_-^*x_-) \geq 0 \tag{C.3}$$

per qualsiasi $x \in C^*(U, V)$. Poichè ω è uno stato su $C^*(A, B)$, si ha che $\omega(x_+^*x_+) \geq 0$, ed inoltre, per quanto detto prima, $x_-^*x_-$ è un elemento positivo di $C^*(A, B)$, e dunque $\omega(x_-^*x_-) \geq 0$, mostrando così la diseuguaglianza (C.3).

Appendice D

Rappresentazioni Unidimensionali di \mathcal{P}^σ

Lemma *L'algebra $\mathcal{P}^\sigma = \mathcal{P}(A, B, \mathbb{I})$ ammette $*$ -rappresentazioni unidimensionali non degeneri se e soltanto se $\lambda \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, 1\}$, cioè se e soltanto se $\theta \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\} \pmod{1}$. Una classificazione di tali rappresentazioni è la seguente:*

1. Se $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ ci sono rappresentazioni date da

$$\pi(A) = \pi(B) = 0, \quad \pi(\mathbb{I}) = 1$$

2. Se $\lambda \in \{-1, -\frac{1}{2}, 1\}$ ci sono quattro rappresentazioni date da:

$$\begin{aligned}\pi(A) &= \pm\sqrt{2(1+\lambda)} \\ \pi(B) &= \pm\sqrt{2(1+\lambda)} \\ \pi(\mathbb{I}) &= 1\end{aligned}$$

dove una combinazione qualsiasi di segni $+$ e $-$ può apparire.

3. Se $\lambda = 1$, c'è una famiglia a due parametri di rappresentazioni in cui $\pi(A)$ e $\pi(B)$ assumono indipendentemente arbitrari valori reali.
4. Se $\lambda = -1$, ci sono due famiglie ad un parametro di rappresentazioni date dalla regola che $\pi(A)$ è arbitrario e $\pi(B) = 0$, o che $\pi(A) = 0$ e $\pi(B)$ è arbitrario.

Dim. Assumiamo dapprima che π sia una rappresentazione unidimensionale con $\pi(A) = 0$. Se $1 - \lambda^2 \neq 0$, segue dall'equazione (5.2.12) che $\pi(B) = 0$, e se $\pi(\mathbb{I}) = 1$ segue dalla (5.2.25) che $8\lambda(1 - \lambda^2)$, e cioè che $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

Viceversa, se $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, la rappresentazione π di cui sopra rispetta le relazioni (5.2.12), (5.2.17), (5.2.25).

Si assuma ora che π è una rappresentazione unidimensionale con $\pi(A) \neq 0$. Segue dalla (5.2.17) che

$$2(1 - \lambda)\pi(B)^2 = 4(1 - \lambda^2) \quad (\text{D.1})$$

Se $\lambda \neq 1$ segue che

$$\pi(B) = \pm\sqrt{2(1 + \lambda)} \quad (\text{D.2})$$

Così, se $\lambda \neq -1$, cioè se $\pi(B) \neq 0$, segue dalla (5.2.12) che

$$\pi(A) = \pm\sqrt{2(1 + \lambda)} \quad (\text{D.3})$$

Ora, inserendo questi valori nell'equazione (5.2.25) e usando $\pi(\mathbb{I})$, si vede che π rispetta le relazione (5.2.25) se e soltanto se la seguente equazione polinomiale del quarto ordine è valida

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (\text{D.4})$$

Così otteniamo che le quattro rappresentazioni descritte al punto 2 se e soltanto se

$$\lambda \in \left\{ -1, -\frac{1}{2}, 1 \right\}$$

Con la procedura precedente otteniamo tutte le rappresentazioni unidimensionale quando $-1 < \lambda < 1$. Quando $\lambda = 1$, le equazioni (5.2.12), (5.2.17), (5.2.25) diventano

$$\begin{aligned} BA^2 + A^2B &= 2ABA \\ AB^2 + B^2A &= 2BAB \\ BABA &= 3ABAB - 2A^2B^2 \end{aligned}$$

e quando $\lambda = -1$ le relazioni diventano

$$\begin{aligned} BA^2 + A^2B &= -2ABA \\ AB^2 + B^2A &= -2BAB \\ BABA &= 3ABAB + 2A^2B^2 \end{aligned}$$

da cui seguono immediatamente il punto 3 ed il punto 4 del lemma precedente. Utilizzando tali risultati si può mostrare che

Sia $\rho \neq \pm 1$. Allora le relazioni (5.2.12), (5.2.17), e (5.2.25) che definiscono $\mathcal{P}(A, B, \mathbb{I})$ sono indipendenti, cioè nessuna di esse si può ottenere dalle altre due.

A titolo di esempio, mostriamo come le sole relazioni (5.2.12) e (5.2.17) *non* implicano la relazione (5.2.25). Infatti, la (5.2.12) e la (5.2.17) permettono la rappresentazione unidimensionale π di $\mathcal{P}(A, B, \mathbb{I})$ definita da

$$\pi(A) = \pi(B) = 0, \quad \pi(\mathbb{I}) = 1$$

dove $\varphi = 2\pi\theta$. Il lemma precedente mostra che ciò è consistente con la relazione (5.2.25) soltanto se $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$, e cioè $\theta \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$.

Bibliografia

- [BE78] O. Bratteli and G.A. Elliott, *Structure Spaces of Approximately Finite-Dimensional C^* -algebras, II*, Journal of Functional Analysis **30** (1978), 74–82.
- [BEEK91] O. Bratteli, G.A. Elliott, D.E. Evans, and A. Kishimoto, *Non-commutative spheres I*, International Journal of Mathematics **2** (1991), no. **2**, 139–166.
- [BEEK92] ———, *Non-commutative spheres II: rational rotations*, Journal of Operator Theory **27** (1992), 53–85.
- [BEJ84] O. Bratteli, G.A. Elliott, and P.E.T. Jørgensen, *Decomposition of unbounded derivations into invariant and approximately inner parts*, J. reine angew. Math. **346** (1984), 166–193.
- [BEL⁺96a] G. Bimonte, E. Ercolessi, G. Landi, F. Lizzi, G. Sparano, and P. Teotonio-Sobrinho, *Lattices and their continuum limits*, Journal of Geometry and Physics (1996), no. 20, 318–328.
- [BEL⁺96b] ———, *Noncommutative lattices and their continuum limits*, Journal of Geometry and Physics (1996), no. 20, 329–348.
- [BFF⁺78] H. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, *Deformation theory and quantization I, II*, Ann. Phys. **110** (1978), 61–110,111–151.
- [BK92] O. Bratteli and A. Kishimoto, *Non-commutative spheres III: irrational rotations*, Communications on mathematical physics **147** (1992), 605–624.
- [Bra72] O. Bratteli, *Inductive Limits of Finite Dimensional C^* -algebras*, Transactions of the American Mathematical Society **171** (1972), 195–234.

BIBLIOGRAFIA

- [Bra74] ———, *Structure Spaces of Approximately Finite-Dimensional C^* -algebras*, *Journal of Functional Analysis* **16** (1974), no. 2, 192–204.
- [Bra81] ———, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, vol. 1, Springer-Verlag, 1981.
- [Bra86] ———, *Derivations, Dissipations and Group Actions on C^* -algebras*, *Springer Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1229, Springer, 1986.
- [CL90] A. Connes and J. Lott, *Particles and noncommutative geometry*, *Nucl.Phys. B (Proc. Suppl.)* **B18** (1990), 29–47.
- [CMMN93] G. Cristofano, G. Maiella, R. Musto, and F. Nicodemi, *Topological order in Quantum Hall Effect and two-dimensional conformal field theory*, *Nuclear Physics B(Proc. Suppl.)* (1993), no. 33C, 119–133.
- [Con94] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.
- [DFR95] S. Doplicher, K. Fredenhagen, and J.E. Roberts, *The Quantum Structure of Spacetime at the Planck Scale and Quantum Fields*, *Communications on Mathematical Physics* **172** (1995), 187–220.
- [EMS04] G. Esposito, G. Marmo, and E.C.G. Sudarshan, *From Classical to Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2004.
- [GBVF00] J. Gracia-Bondía, J. Varilly, and H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhauser, 2000.
- [GGBI⁺04] V. Gayral, J.M. Gracia-Bondía, B. Iochum, T. Schücher, and J.C. Varilly, *Moyal Planes are Spectral Triples*, *Communications on mathematical physics* **246** (2004), no. 4, 569–623.
- [GLMV94] J. Grabowski, G. Landi, G. Marmo, and G. Vilasi, *Generalized Reduction Procedure: Symplectic and Poisson Formalism*, *Fortsch. Phys.* **42** (1994), 393–427.
- [HY61] J.G. Hocking and G.S. Young, *Topology*, Dover, 1961.
- [Ish89] C.J. Isham, *Modern Differential Geometry For Physicists*, World Scientific, 1989.

BIBLIOGRAFIA

- [Lan97] G. Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometries*, Lecture Notes in Physics: Monographs **m51**, Springer, 1997.
- [Mor89] G. Morandi, *Quantum Hall Effect. Topological problems in Condensed Matter Physics*, Bibliopolis, Napoli, 1989.
- [Rie81] M.A. Rieffel, *C*-algebras Associated with Irrational Rotations*, Pacific Journal of Mathematics **93** (1981), no. 2, 415–429.
- [Rie89] ———, *Deformation Quantization of Heisenberg Manifolds*, Communications on Mathematical Physics **122** (1989), 531–562.
- [Rie90] ———, *Non-commutative tori-A case study of non-commutative differentiable manifolds*, Contemporary Mathematics **105** (1990), 191–211.
- [RR69] J.E. Roberts and G. Roepstorff, *Some Basic Concepts of Algebraic Quantum Theory*, Communications on mathematical physics **11** (1969), 321–338.
- [RS72] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis*, Academic Press, 1972.
- [Sak91] S. Sakai, *Operator Algebras in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1991.
- [Seg47] I.E. Segal, *Postulates for general quantum mechanics*, Ann. Math. **48** (1947), no. 4, 930–948.

Ringraziamenti

Sarei tentato di cominciare con “Sia dato lo spazio \mathcal{R} di tutti di ringraziamenti...”, ma mi asterró dal farlo. Dimesso l’autoritario “noi”, ritorno ad un “io” piú colloquiale e piú adatto certamente al contenuto di queste pagine. Come tutte le cose che faccio quotidianamente, i ringraziamenti che seguono non sono un’insieme ordinato (nemmeno parzialmente): che nessuno si offenda, quindi, se si trova relegato in fondo alla lista.

Ringrazio “didatticamente” il Prof. Lizzi, per avermi fatto sperimentare, da teorico, quanto io sia capatosta¹ e convinto delle mie idee, dandomi comunque la possibilità di seguirle fino in fondo, e ciò non è poco. Ringrazio il Prof. Maiella per avermi spiegato un bel pó di cose sull’effetto Hall, e sulle teorie conformi. Un grazie và ai Prof. Della Selva e Zaccaria, per avermi insegnato per primi che cos’è un’algebra e che cos’è un gruppo: quello che avete sopportato fino a questa pagina è anche un pó colpa loro! Ringrazio Patrizia e Alessandro, per avermi spesso incoraggiato, e per essersi sorbiti qualche mio seminario da “frase non finita”. Ringrazio Raffaele e Luigi per le innumerevoli, lunghe discussioni sui massimi e sui minimi sistemi, e per consigli tecnici che si trovano quà e là nelle pagine precedenti. Sempre in argomento, ringrazio Ruben per non essersi mai sottratto ai miei voli pindarici, che quelli che mi conoscono sanno essere quasi acrobatici. Ringrazio Valentino, per i suoi utopici e spericolati progetti esamiistici, che vanificano ogni forma di organizzazione. Ringrazio Francesco, e il “terzo escluso”, grazie al quale un giorno, forse, avró un posto di lavoro. Ringrazio Peppe π e i suoi legumi, per le serate passate a pizza e matematica. Ringrazio George, Luca e Willy, per l’aria di ebbrezza che si portano sempre dietro. Ringrazio Arturo e Geppina, per la politica e per i consigli culinari. In particolare, ringrazio

¹*Capatosta* [Trad. *testa dura*]: termine dialettale molto diffuso nel Sud dell’Italia, utilizzato per indicare persone poco o per nulla inclini a seguire suggerimenti e consigli altrui.

i miei genitori, per avermi dato la possibilità di studiare con serenità e senza intromissioni, e per i molti sacrifici fatti a tale scopo. Ringrazio (una parte di) quelli che mi conoscono, e che ho omesso. Infine, ma *assolutamente* non per ultimo, ringrazio Antonella, senza la quale né questo né altri lavori sarebbero mai possibili, per avermi aiutato nei molti momenti di difficoltà personale, per avermi ascoltato, in modo imperterrito, per avermi sopportato per tutto questo tempo, per avermi sempre spinto ad andare avanti, per i sistemi dinamici, per le “cooking facilities”: per tanto, tanto altro ancora grazie!

I matematici che scoprono, sistemano e fanno tutto il lavoro, devono accontentarsi di essere semplicemente aridi calcolatori e manovali. Quell'altro [Hooke], invece, che non fa nulla, ma pretende di accaparrarsi tutto, dovrebbe portarsi via tutte le scoperte tanto dei suoi predecessori, quanto dei suoi successori. Ed ecco che io adesso dovrei riconoscere per iscritto di aver ricevuto tutto da lui, e cioè di aver semplicemente ruminato dei calcoli, dimostrazioni, e fatto un lavoro da bestia a rimorchio delle illuminazioni del grande uomo.

Isaac Newton